دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم تحقیقات اردبیل

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc.)

رشته: ریاضی کاربردی، گرایش: آنالیز عددی

عنوان

حل معادلات انتگرو ـ دیفرانسیل ولترا ـ فردهلم غیرخطی با روش اختلال هموتوپی

استاد راهنما

دکتر اکبر جعفری شاعرلر

پژوهشگر

نیره بابازاده اردبیلی

سال تحصیلی ۹۴-۹۳

سپاس‌گزاری...

از استاد راهنمای گرامی‌ام جناب آقای دکتر اکبر جعفری شاعرلر بی‌نهایت سپاسگزارم، که بدون راهنمایی‌های ایشان این پایان‌نامه به سرانجام نمی‌رسید.

در آخر از زحمات خواهر عزیزم خانم مریم بابازاده که در طول تحصیل نهایت لطف و همکاری را داشتند کمال سپاسگزاری را دارم.

نیره بابازاده اردبیلی

سال تحصیلی ۹۴-۹۳

تقدیم به:

تقدیم به پدر و مادرم که از نگاهشان صلابت و از رفتارشان محبت
و از صبرشان ایستادگی را آموخته‌ام.
و به همسرم، شریک زندگیم و پناه خستگی ام
و شکوفه های باغ زندگی ام علیرضا و حامد.

فهرست مطالب

چکیده

روش اختلال هموتوپی توسط جی‌هوان‌هی معرفی گردید. این روش نیاز به پارامتر کوچک در معادله ندارد. در این روش طبق تکنیک هموتوپی در توپولوژی یک هموتوپی با یک پارامتر $p \in [۰, ۱]$ ساخته می‌شود و این پارامتر به صورت یک پارامتر کوچک فرض می‌شود. این روش ترکیب هموتوپی و روش اختلال می‌باشد که در حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال خطی و غیرخطی سودمند و کارا می‌باشد. این روش در سالهای اخیر برای حل اکثر مسائل غیرخطی توسط بسیاری از دانشمندان مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این پایان‌نامه، کاربردی از روش اختلال هموتوپی‌هی برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی ولترا -فردهلم غیر خطی بکار می‌رود. در مورد روش اختلال هموتوپی و روش فوق و آنالیز همگرایی بحث کرده و بکارگیری روش در معادلات انتگرالی ولترا فردهلم غیرخطی بحث می‌شود و چند مثال غیر خطی برای تشریح کارایی و سادگی این روش نیز ارائه می‌شود.

واژگان کلیدی: روش تحلیلی، عملگر، همگرایی سری، اختلال، معادلات انتگرال دیفرانسیل ولترا فردهلم

مقدمه

روش اختلال هموتوپی برای حل معادلات تابعی زیادی توسط ریاضیدانان و مهندسین مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این روش به طور مکرر یک مسأله‌ی مشکل (عمدتاً بخاطر غیر خطی بودن) را به مسأله‌ی خطی و ساده تبدیل می‌کند. اساس تقریباً تمام روش‌های اختلال بر فرض وجودی یک پارامتر کوچک در معادله استوار است. این روش به منظور حذف این پارامتر کوچک ارائه شده است. در سالهای اخیر، کاربرد نظریه اختلال هموتوپی در تحقیقات زیادی دیده شده است. در این پایان‌نامه، روش اختلال هموتوپی را برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال ولترا-فردهلم غیر خطی ارائه می‌دهیم. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_{0\leq i\leq m} p_i(x)y^i(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)[y(t)]^p dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)[y(t)]^q dt \qquad (1)$$

که در آن $p_i(x)$، $0 \leq i \leq m$، $k_2(x,t), k_1(x,t), f(x)$ توابع n بار $(n \geq m)$ مشتق‌پذیر بر بازه‌ی $a \leq x,t \leq b$ بوده، λ_1, b, a و λ_2 ثابت p و q نیز اعداد صحیح مثبت هستند.

این پایان‌نامه شامل ۵ فصل بوده که در فصل اول مقدمات و تعاریف اولیه مربوط به معادلات انتگرالی ارائه شده است. در فصل دوم به طور مفصل معادلات انتگرالی ولترا ـ فردهلم غیرخطی را معرفی کرده و مثالهایی برای آنها ارائه شده است. در فصل سوم به بیان روش اختلال هموتوپی و کاربردهای آن برای حل معادلات انتگرالی بیان شده است و در فصل چهارم معادلات انتگرو ـ دیفرانسیل ولترا ـ فردهلم را معرفی می‌کنیم. و در نهایت در فصل پنجم با استفاده از روش اختلال هموتوپی بررسی جواب‌های عددی معادلات انتگرو ـ دیفرانسیل ولترا ـ فردهلم غیرخطی پرداخته شده است.

فصل ۱

مقدمات و تعاریف اولیه

مقدمه

در این فصل مقدمات و تعاریف اولیه مربوط به فصل‌های بعدی را که شامل توپولوژی، بسط تیلور، معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرالی، حل مقدماتی آنها و ... بیان شده است.

۱.۱ بسط تیلور

فرض کنید $f(x)$ تابعی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر در فاصله $[x_۰, x_۱]$ باشد به‌طوریکه a یک نقطه‌ی درونی در این فاصله باشد. سری تیلور تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ به فرم زیر است:

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{۱.۱}$$

اگر در این بسط به جای $a = ۰$ قرار دهید این سری را بسط مک لوران می‌گویند. که به صورت زیر است:

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n \tag{۲.۱}$$

یا معادلاً:

$$f(x) = f(۰) + \frac{f'(۰)}{۱!}x + \frac{f''(۰)}{۲!}x^۲ + \cdots + \frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n + \cdots \tag{۳.۱}$$

است.

۲.۱ توپولوژی

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. منظور از یک توپولوژی روی X عبارت است از مجموعه ای از زیرمجموعه های X مانند τ که دارای شرایط زیر باشد:

الف) مجموعه‌های تهی و X، عضو τ باشند.

ب) اجتماع هر تعداد دلخواه از اعضای τ در τ قرار داشته باشد؛

پ) اشتراک هر تعداد متناهی اعضای τ در τ قرار داشته باشد؛

گردایهٔ τ، توپولوژی تعریف شده روی X نام دارد. اگر توپولوژی تعریف شده روی X مشخص باشد آنگاه فضای توپولوژیکی می نامند.

۳.۱ بسط تیلور

فرض کنید $f(x)$ تابعی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر در فاصله $[x_0, x_1]$ باشد به‌طوریکه a یک نقطه‌ی درونی در این فاصله باشد. سری تیلور تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ به فرم زیر است:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{۴.۱}$$

اگر در این بسط به جای $a = 0$ قرار دهید این سری را بسط مک لوران می‌گویند. که به صورت زیر است:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{۵.۱}$$

یا معادلاً:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \tag{۶.۱}$$

است.

۴.۱ معادلات دیفرانسیل

۱.۴.۱ معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول

صورت استاندارد این معادله به فرم زیر است:

$$u' + p(x)u = q(x) \tag{۷.۱}$$

که جواب عمومی آن به شکل زیر است:

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right] \tag{۸.۱}$$

۲.۴.۱ معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم با ضرایب ثابت همگن

فرم عمومی آن به‌صورت زیر است:

$$au'' + bu' + cu = ۰, \quad a \neq ۰$$

که برای حل این معادلات ابتدا معادله‌ی مشخصه را بدست آورده و حل می‌کنیم. که معادله‌ی مشخصه به فرم زیر خواهد بود:

$$ar^{۲} + br + c = ۰$$

با توجه به این معادله حالات‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac$$

الف) $\Delta > ۰ \Rightarrow r_{۱} \neq r_{۲}$ دو ریشه

و جواب عمومی $u(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ است

$$\text{ب)}\ \Delta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2a}$$

و جواب عمومی، $u(x) = (A + Bx)e^{rx}$ است.

ج) $\Delta < 0 \Rightarrow$ ودو ریشه‌ی مختلط $r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta$

و جواب عمومی آن،

$$u(x) = e^{\alpha x}[A \cos \beta x + \beta \sin \beta x]$$

است.

۳.۴.۱ معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه ۲ غیرهمگن

فرم این معادلات به‌صورت زیر است:

$$au'' + bu' + cu = g(x), \quad a \neq 0$$

که a و b و c مقادیر ثابت و $g(x) \neq 0$ است. جواب معادله به شکل

$$u = u_c(x) + u_p(x)$$

خواهد بود که $u_c(x)$ جواب عمومی و $u_p(x)$ جواب خصوصی با توجه به تابع $g(x)$ خواهد بود.

۴.۴.۱ روش جواب به‌صورت سری

در این روش جوابی به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + \cdots$$

با مشتق‌گیری جمله‌به‌جمله خواهیم داشت:

$$u'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots$$

$$u''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3$$

$$\vdots$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی جواب معادله را متناظر با سری مک‌لوران تابع بدست می‌آوریم.

۵.۴.۱ قاعد لابتیس برای مشتق‌گیری از انتگرال

فرض کنید $f(x,t)$ تابع پیوسته و $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ در دامنه‌ی $x-t$ شامل مستطیل، $a \leq x \leq b, t_0 \leq t \leq t_1$ پیوسته باشد. و قرار دهید

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)dt$$

با مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$\begin{aligned} F'(x) = \frac{dF}{dx} &= f(x, h(x)h'(x) - f\big(x, g(x)\big).g'(x) \\ &+ \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt. \end{aligned}$$

۵.۱ تبدیل انتگرال چندگانه به یگانه

$$\int_0^x \int_0^{x_1} F(t)dtdx_1 = \int_0^x (x-t)F(t)dt,$$

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} u(x_n)dx_n dx_{n-1}\dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}u(t)dt,$$
$$\int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x (x-t)u(t)dtdt\dots dt = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)u(t)dt$$

۶.۱ تبدیل لاپلاس

فرض کنید تابع $f(x)$ تابعی دلخواه و $x \geq 0$ باشد. تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ را با $F(s)$ نمایش می‌دهند.

و چنین تعریف می‌کنیم:

$$F(s) = L\big(f(x)\big) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

۱.۶.۱ قضیه‌ی پیچش برای تبدیل لاپلاس

$$L(f_1 * f_2)(x) = L\left(\int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt\right) = F_1(s)\cdot F_2(s).$$

۷.۱ معادلات انتگرالی

عبارت معادله‌ی انتگرالی برای اولین بار در سال ۱۸۸۸توسط بویس ریموند[1] به معادلاتی اطلاق شد که تابع $u(x)$ زیر علامت انتگرالی در آن مجهول باشد. گرچه لاپلاس[2]، آبل[3] و پواسون[4] نیز در

[1] Bais-Reymond
[2] Laplace
[3] Abel
[4] Poisson

زمان‌های خود اقدام به حل معادلاتی به شکل معادلات انتگرالی کرده بودند. از آنجا که فردهلم[۵] و ولترا[۶] به بحث جامعی روی معادلات انتگرالی پرداخته‌اند، لذا امروزه معادلات انتگرالی را طی دو دسته‌بندی بزرگ، معادلات انتگرالی فردهلم و معادلات انتگرالی ولترا مورد بحث قرار می‌دهند.

تعریف ۲.۱. یک معادله‌ی انتگرالی معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ در زیر علامت انتگرال ظاهر شود. یک نمونه کلی معادله‌ی انتگرالی نسبت به $u(x)$ به شکل زیر است

$$u(x) = f(x) + \int k(x,t)u(t)dt \tag{۹.۱}$$

که در آن $k(x,t)$ یک تابع دو متغیره است که هسته‌ی معادله‌ی انتگرالی نامیده می‌شود. هسته‌ی معادله و تابع $f(x)$ هر دو معلومند. هدف از این معادله تعیین تابع مجهول $u(x)$ می‌باشد.

برای حل معادلات انتگرالی، روشهای تحلیلی و عددی مختلفی وجود دارند که به اختصار در این پایان‌نامه مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۸.۱ تقسیم‌بندی معادلات انتگرالی

معادلات انتگرالی را در حالات کلی به دو نوع مهم زیر می‌توان تقسیم‌بندی نمود

(الف) معادلات انتگرالی فردهلم

شکل کلی این نوع معادلات به صورت زیر است

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{۱۰.۱}$$

[۵] Fredholm

[۶] Volterra

که در آن پارامتر λ، $k(x,t)$ و $f(x)$ معلوم‌ند. ضمناً این نوع معادله فردهلم را خطی گوییم، زیرا تابع مجهول $u(x)$ در زیر انتگرال به‌طور خطی ظاهر شده است.

تبصره ۳.۱. اگر در رابطه‌ی (۱۰.۱) $\phi(x) = 0$ باشد، آنگاه معادله به صورت زیر خواهد بود

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = 0 \qquad (11.1)$$

که این معادله را معادله‌ی انتگرالی فردهلم خطی نوع اول گویند.

تبصره ۴.۱. اگر در رابطه‌ی (۱۰.۱) $\phi(x) = 1$ باشد، آنگاه معادله‌ی مذکور به صورت زیر خواهد بود

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (12.1)$$

معادله‌ی (۱۲.۱) را معادله‌ی انتگرالی فردهلم خطی نوع دوم گویند.

(ب) معادلات انتگرال خطی ولترا به صورت زیر است

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (13.1)$$

که مانند آنچه که در مورد معادلات انتگرالی فردهلم گفته شد، اگر $\phi(x) = 0$ و $\phi(x) = 1$ آن‌گاه به‌ترتیب معادلات ولترای خطی نوع اول و نوع دوم را خواهیم داشت.

تبصره ۵.۱. اگر در هر کدام از معادلات گفته شده، $f(x) = 0$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی انتگرالی را همگن گویند در غیر این‌صورت معادله را، معادله‌ی انتگرال غیرهمگن نامند.

تبصره ۶.۱. البته شایان ذکر است که معادلات انتگرالی در یک دسته‌بندی دیگر به معادلات انتگرالی منفرد و معادلات انتگرال دیفرانسیل نیز تقسیم می‌شوند.

(ج) یک معادله‌ی انتگرالی را منفرد گویند هرگاه حداقل یکی از حدود انتگرال بی‌نهایت باشد یا اینکه هسته‌ی معادله‌ی انتگرالی در یک یا چند نقطه، نامتناهی باشد.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \qquad (۱۴.۱)$$

که در آن $\alpha(x)$ یا $\beta(x)$ یا هر دو آنها می‌توانند بی‌نهایت باشند.

(د) معادلات انتگرال-دیفرانسیل

هرگاه در معادلات انتگرالی، معادله دارای مشتقاتی با مرتبه‌ی دلخواه از $u(x)$ باشد، آن‌گاه معادله را معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل گویند.

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_{a}^{x} k(x,t)u(t)dt \qquad (۱۵.۱)$$

۹.۱ جواب معادله‌ی انتگرالی

یک جواب معادله‌ی انتگرالی، تابعی است مانند $u(x)$ که در معادله‌ی انتگرالی صدق می‌کند. در این قسمت روش‌های حل معادلات انتگرالی به اختصار مورد بحث قرار می‌گیرند. ابتدا روش‌های تحلیلی و سپس روش‌های عددی را برای این منظور بیان می‌کنیم. البته ابتدا برای معادلات انتگرالی فردهلم و سپس برای معادلات انتگرالی ولترا این‌کار را انجام می‌دهیم.

قبل از شروع روش‌ها، در مورد هسته‌ی معادلات انتگرالی موارد زیر را ذکر می‌کنیم.

۱. هسته‌ی متقارن: هسته‌ی $k(x,t)$ را متقارن گوئیم هرگاه بتوان نوشت

$$k(x,t) = k(t,x) \qquad (۱۶.۱)$$

۲. هسته‌های تفاضلی (پیچشی): هسته‌ی $k(x,t)$ را تفاضلی گوئیم هرگاه داشته باشیم

$$k(x,t) = k(x-t) \tag{۱۷.۱}$$

۳. هسته‌ی جدائی‌پذیر: هسته‌ی $k(x,t)$ را جدائی‌پذیر گوئیم هرگاه داشته باشیم

$$k(x,t) = g(x).h(x) \tag{۱۸.۱}$$

یا به‌عبارتی کلی‌تر، هسته‌ی $k(x,t)$ را جدائی‌پذیر گوئیم اگر بتوان نوشت

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x).h_k(t) \tag{۱۹.۱}$$

تعریف ۷.۱. هسته‌ی $k(x,t)$ را برحسب x و t در مربع $a \leq x \leq b$و $a \leq t \leq b$ انتگرال‌پذیر گویند اگر شرط زیر برقرار باشد

$$\int_a^b \int_a^b k(x,t)dxdt < \infty \tag{۲۰.۱}$$

شرط بالا را شرط منظم بودن گویند.

این شرط منجر به توسعه جواب معادله‌ی انتگرال فردهلم خواهد شد.

قضیه ۸.۱. معادله‌ی انتگرالی فردهلم غیرهمگن،فقط و فقط یک جواب دارد اگر که تنها جواب معادله‌ی انتگرالی فردهلم همگن $u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt$، جواب بدیهی $u(x) = 0$ باشد.

قضیه ۹.۱. اگر $k(x,t)$ تابعی حقیقی و پیوسته باشد و روی مربع $a \leq x \leq b$ و $a \leq t \leq b$ کراندار باشد، یعنی اگر $M \geq |k(x,t)|$ و چنانچه $f(x)$ در فاصله‌ی $a \leq x \leq b$ پیوسته و غیرصفر باشد، آن‌گاه شرط لازم برای وجود یک جواب منحصربه فرد برای معادله‌ی انتگرالی فردهلم غیرهمگن عبارت است از

$$|\lambda| M(b-a) < 1 \tag{۲۱.۱}$$

تبصره ۱۰.۱. نکته‌ی مهم این‌که یک جواب پیوسته برای معادله‌ی انتگرالی فردهلم حتی اگر شرط بالا تحقق نپذیرد، می‌تواند وحود داشته باشد

مثال ۱۱.۱.

$$u(x) = -۴ + \int_{-۱}^{۱} (۲x + ۳t)u(t)dt$$

$$f(x) = ۴, \qquad b - a = ۱, \qquad \lambda = ۱, \qquad |k(x,t)| \leq ۵$$

$u(x) = ۴x$، تابعی پیوسته و ناصفر است که جواب معادله می‌باشد در حالی که رابطه‌ی زیر برقرار نیست

$$|\lambda| M(b-a) = ۱ \cdot ۵ \cdot ۱ = ۵ \not< ۱$$

۱۰.۱ روشهای تحلیلی برای حل معادلات انتگرالی فردهلم

روشهای تحلیلی مختلفی برای حل معادلات انتگرال فردهلم وجود دارد که به اختصار چند مورد بیان می‌شود.

۱ ـ تبدیل معادلات انتگرالی فردهلم به معادلات دیفرانسیل با مقدار مرزی

در این روش می‌توان برخی از معادلات انتگرالی فردهلم که دارای عبارت زیرانتگرال ساده‌ای هستند را با قانون مشتق‌گیری لایبنیتز[۷] تبدیل به معادلات دیفرانسیل با مقدار مرزی کرد که دارای راه‌حل بسیار ساده‌تری می‌باشند.

۲ ـ تبدیلات لاپلاس و فوریه برای حل معادلات انتگرال فردهلم با هسته‌ی تفاضلی

۲ ـ روش محاسبه‌ی مستقیم

[۷] Leibniz

در این روش فرض می‌کنیم هسته‌ی معادله‌ی انتگرال فردهلم جدایی‌پذیر به شکل $k(x,t) = g(x)h(t)$ باشد. لذا در معادله‌ی (۱۲.۱) مقدار $k(x,t)$ را قرار می‌دهیم.

$$u(x) = f(x) + \lambda g(x) \int_a^b h(t)u(t)dt \tag{۲۲.۱}$$

طرف راست معادله‌ی (۲۲.۱) نشان می‌دهد که انتگرال به یک متغییر یعنی t بستگی دارد. لذا مقدار انتگرال معینی با یک ثابت مانند α برابر می‌باشد. به‌عبارت دیگر فرض می‌کنیم

$$\alpha = \int_a^b h(t)u(t)dt \tag{۲۳.۱}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲۳.۱) در معادله‌ی (۲۲.۱) خواهیم داشت

$$u(x) = f(x) + \lambda \alpha g(x) \tag{۲۴.۱}$$

کافی است مقدار α را پیدا کنیم، یعنی با جایگذاری رابطه‌ی (۲۳.۱) در (۲۲.۱) این‌کار اتفاق خواهد افتاد.

۴ ـ روش تقریبهای متوالی

در این روش، تابع مجهول زیر علامت انتگرال معادله‌ی انتگرالی فردهلم نوع دوم (۱۲.۱) را با تابع حقیقی دلخواه $u_0(x)$ روی فاصله $a \leq x \leq b$ تعویض می‌کنیم.

فرض می‌کنیم که تقریب اول جواب $u(x)$ تابع $u_1(x)$ باشد. آنگاه

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_0(t)dt \tag{۲۵.۱}$$

تقریب دوم $u(x)$ را با $u_2(x)$ نشان می‌دهیم. داریم

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_1(t)dt \tag{۲۶.۱}$$

و اگر این روند را ادامه دهیم، یک رابطه‌ی بازگشتی به‌صورت زیر خواهیم داشت

$$u_{\circ}(x) = \text{مقدار دلخواه اولیه}$$

$$\vdots$$

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) u_{n-1}(t) dt$$

اگرچه می‌خواهید هر تابع با مقدار حقیقی دلخواه را برای $u_{\circ}(x)$ در نظر گرفت، ولی جهت تسریع در محاسبه معمولاً $u_{\circ}(x)$ را توابع زیر در نظر می‌گیریم.

$$u_{\circ}(x) = 0, 1, x$$

لذا با استفاده از مفهوم حد، جواب معادله‌ی انتگرالی فردهلم با استفاده از روش تقریبهای متوالی به صورت زیر خواهد بود.

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x)$$

۵ ـ روش جایگذاری‌های متوالی

این روش جواب معادله‌ی انتگرال را از طریق محاسبه‌ی انتگرالهای یگانه و چندگانه به‌صورت یک سری ارائه می‌کند. در این روش برای معادله‌ی (۱۲.۱) قرار می‌دهیم $x = t, t = t_1$ لذا داریم

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, t_1) u(t_1) dt_1 \qquad (۲۷.۱)$$

با تعویض $u(t)$ در طرف راست رابطه‌ی (۱۲.۱) با مقدار بدست آمده از رابطه‌ی (۲۸.۱) عبارت زیر حاصل می‌شود

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b k(x,t) k(t,t_1) u(t_1) dt_1 dt \qquad (۲۸.۱)$$

با جایگذاری $x = t_۱, t = t_۲$ در رابطه‌ی (۱۲.۱) خواهیم داشت

$$u(t_۱) = f(t_۱) + \lambda \int_a^b k(t_۱, t_۲) u(t_۲) dt \tag{۲۹.۱}$$

و دوباره با جایگذاری رابطه‌ی بالا در رابطه‌ی (۲۸.۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f(t) dt \\ &+ \lambda^۲ \int_a^b \int_a^b k(x,t) k(t,t_۱) f(t_۱) dt_۱ dt \\ &+ \lambda^۲ \int_a^b \int_a^b \int_a^b k(x,t) k(t,t_۱) k(t_۱,t_۲) f(t_۲) dt_۲ dt_۱ dt + \cdots \end{aligned} \tag{۳۰.۱}$$

باید توجه داشت که اگر $\lambda M(b-a) < ۱$ که در آن $|k(x,t)| \leq M$ آن‌گاه سری (۳۰.۱) روی فاصله‌ی بسته‌ی $[a,b]$ یه‌طور یکنواخت همگرا خواهد بود.

تبصره ۱۲.۱. در این روش ملاحظه می‌شود که تابع مجهول $u(x)$ با تابع داده شده $f(x)$ تعویض شده است و لذا محاسبه‌ی انتگرالهای چندگانه حاصل را عملی و ساده می‌سازد. از آن‌جا که این جایگذاری $u(x)$ چندبار در انتگرال‌ها رخ می‌دهد، لذا این روش را روش جایگذاری‌های متوالی می‌نامیم.

۱۱.۱ روش‌های عددی برای حل معادلات انتگرالی فردهلم

روش‌های عددی می‌تواند مبنایی برای حل تقریبی در مواردی که نمی‌توان حل دقیق معادله‌ی انتگرالی را به‌دست آورد مورد استفاده قرار گیرد. روش‌های عددی مهمی که برای تقریب جواب معادله‌ی انتگرالی به‌کار می‌رود عبارتند از روش‌های ذوزنقه‌ای، سیمپسون[۸]، اسپلاین مکعبی[۹] و همچنین از

[۸] Simpson

[۹] Cubic Spline

توابع متعامد مهمی مانند سری چبی‌شف[۱۰]، توابع هرمیت[۱۱]، توابع لاگر[۱۲]، توابع لژاندار[۱۳]، و توابع بسل[۱۴] و ... نیز استفاده می‌شود. در این فصل به اختصار برخی از این روش‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱.۱۱.۱ روش ذوزنقه‌ای

در این روش انتگرال معادله‌ی فردهلم را می‌توان به‌صورت زیر تقریب زد

$$h = \frac{b-a}{n}, \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{۲}[f_۰ + ۲f_۱ + \cdots + ۲f_{n-۱} + f_n] \qquad (۳۱.۱)$$

خطای این روش $o(h)^۲$ است.

۲.۱۱.۱ روش سیمپسون

در این روش، انتگرال معادله‌ی فردهلم را می‌توان به‌صورت زیر تقریب زد

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{۳}[f_۰ + ۴f_۱ + ۲f_۲ + \cdots + ۴f_{n-۱} + f_n] \qquad (۳۲.۱)$$

خطای این روش $o(h^۴)$ است.

[۱۰] Chebyshev
[۱۱] Hermit Functions
[۱۲] Lager’s Poolynominl
[۱۳] Legendre
[۱۴] Bessel

۳.۱۱.۱ روش کالوکیشن

در روش تقریبی کالوکیشن[۱۵] برای حل معادله‌ی (۱۲.۱) جمع جزئی

$$S_N(x) = \sum_{k=۱}^{N} c_k\phi_k(x) \tag{۳۳.۱}$$

به کار می‌رود. $\phi_۱ \dots \phi_n$ توابع مستقل خطی روی بازه‌ی $[a,b]$ هستند. اگر $S_N(x)$ را در رابطه‌ی (۱۲.۱) جایگذاری کنیم دارای خطای $E(x, c_۱, \dots, c_N)$ خواهد بود. داریم

$$S_N(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \sum_{k=۱}^{N} c_k\phi_k(x) + E(x, c_۱, \dots, c_N) \tag{۳۴.۱}$$

برای مشخص شدن c_iها باید N معادله و N نقطه‌ی داخلی $x_۱ \dots x_N$ را بر بازه‌ی $[a,b]$ انتخاب کنیم که خطا در رابطه‌ی (۳۵.۱) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$S_N(x_N) = f(x_i) + \lambda \int_a^b k(x_i,t) \sum_{k=۱}^{N} c_k\phi_k(t)dt$$

مثال ۱۳.۱. معادله‌ی فردهلم زیر را به روش کالوکیشن حل می‌کنیم

$$u(x) = x + \lambda \int_{-۱}^{۱} xtu(t)dt \tag{۳۵.۱}$$

جواب واقعی این مسئله $u(x) = ۳x$ می‌باشد.

توابع مستقل خطی زیر را در نظر می‌گیریم $N = ۳,\ \phi_۱(x) = ۱,\ \phi_۲(x) = x,\ \phi_۳(x) = x^۲$ این توابع مستقل خطی‌اند زیرا رونسکین[۱۶] این توابع غیرصفر است.

$$\det \begin{pmatrix} ۱ & x & x^۲ \\ ۰ & ۱ & ۲x \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} = ۲ \neq ۰$$

[۱۵] Callocation

[۱۶] Wronskian

$$S_3(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + c_3\phi_3(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 \qquad (۱.۳۶)$$

رابطه‌ی (۱.۳۷) را در (۱.۳۶) قرار می‌دهیم

$$c_1 + c_2x + c_3x^2 = x + \int_{-1}^{1} xt(c_1 + c_2t + c_3t^3)dt + E(x, c_1, c_2, c_3)$$
$$x + \frac{2}{3}c_2x = x\left(1 + \frac{2}{3}c_2\right) + E(x, c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

با فرض $E(x, c_1, c_2, c_3) = 0$ داریم

$$-1\left(1 + \frac{2}{3}c_2\right) = c_1 - c_2 + c_3,\ c_1 = 0,\ \left(1 + \frac{2}{3}c_2\right) = c_1 + c_2 + c_3$$
$$\Longrightarrow c_1 = c_3 = 0,\ c_2 = 3 \Longrightarrow u(x) = 3x$$

۱.۱۱.۴ روش گالرکین

در روش گالرکین[۱۷] نیز مثل روش قبلی از مجموعه توابع مستقل خطی متعامد برای بدست آوردن N ضریب استفاده می‌کنیم . فرض کنیم $S_N(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i\phi_i(x)$ مجموعه توابع متعامد باشد. با جایگذاری این رابطه در رابطه‌ی (۱.۱۲) داریم

$$S_N(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)S_i(t)dt \qquad (۱.۳۷)$$

$$E(x, c_1, \ldots,) = S_i(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)S_i(t)dt - f(x) \qquad (۱.۳۸)$$

طرفین رابطه‌ی (۱.۳۸) را در $\phi_i(x)$ ضرب می‌کنیم و نسبت به x انتگرال می‌گیریم. خواهیم داشت

$$\int_a^b \big(\phi_i(x)S_i(x) - \phi_i(x)\lambda\int_a^b k(x,t)S_i(t)\big)dx = \int_a^b f(x)\phi_i(x)dx$$
$$\int_a^b \phi_i(x)\big(S_N(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)S_N(t)dt\big)dx = \int_a^b f(x)\phi_N(x)dx \qquad (۱.۳۹)$$

[۱۷] Galerkin

۱۲.۱ روش‌های تحلیلی برای حل معادلات انتگرالی ولترا

شکل کلی معادله‌ی انتگرالی ولترا به‌صورت زیر می‌باشد

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \tag{۴۰.۱}$$

در این قسمت روشهای موجود را به اختصار توضیح می‌دهیم. البته تشابه زیادی در روش حل معادلات فردهلم و ولترا وجود دارد.

۱.۱۲.۱ روش جواب سری

برای حل معادله‌ی انتگرالی ولترای نوع دوم فرض می‌کنیم

$$u(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n \tag{۴۱.۱}$$

با جایگذاری این رابطه در رابطه‌ی (۱۳.۱) داریم

$$a_\circ + a_\backslash x + \cdots + a_n x^n + \cdots = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)(a_\circ + a_\backslash t + \cdots + a_n t^n + \cdots)dt \tag{۴۲.۱}$$

با حل انتگرال طرف راست و هم‌ارز قرار دادن ضرایب، a_iها بدست می‌آیند.

۱۳.۱ روش تقریب‌های متوالی

این روش که برای حل معادلات فردهلم به کار برده شد عیناً برای معادلات ولترا نیز به کار می‌رود.

این روش را به‌طور خلاصه می‌توان نوشت

هر تابع با مقدار حقیقی دلخواه $= u_\circ(x)$

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_\circ^x k(x,t)u_{n-1}(t)dt; \quad n > \circ \tag{۱.۴۳}$$

و در نهایت جواب به صورت زیر خواهد بود

$$u(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(x)$$

۱.۱.۱۳ روش جایگذاری‌های متوالی

درست مانند حل معادلات فردهلم برای معادلات ولترا هم داریم

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_\circ^x k(x,t)f(t)dt \\ &+ \lambda^2 \int_\circ^x \int_\circ^t k(x,t)k(t,t_1)f(t_1)dt_1dt \\ &+ \lambda^3 \int_\circ^x \int_\circ^t \int_\circ^{t_1} k(x,t)k(t,t_1)k(t_1,t_2)u(t_2)dt_2dt_1dt \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

۱.۱۳.۲ تبدیل معادلات انتگرالی ولترا به معادلات دیفرانسیل با مقدار اولیه

معادلات انتگرالی ولترای نوع دوم را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کنیم که این‌کار به سادگی با اعمال قاعده‌ی لایبنیتز انجام‌پذیر است.

قاعده‌ی لایبنیتز برای مشتق‌گیری از انتگرال به‌صورت زیر است

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t)dt = G\big(x,\beta(x)\big)\frac{d\beta(x)}{dx} - G\big(x,\alpha(x)\big)\frac{d\alpha(x)}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{dG(x,t)}{dx}dt \tag{۱.۴۴}$$

که در آن $G(x,t)$ و $\frac{dG}{dx}$ توابعی پیوسته روی دامنه‌ی D می‌باشند و D ناحیه‌ای است در صفحه که شامل مستطیل R است و $R = \{(x,t)|a \leq x \leq b,\ c \leq t \leq d\}$ در ضمن $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ توابعی هستند که مشتقات پیوسته روی فاصله‌ی (a,b) دارند.

تبصره ۱۴.۰۱. مسائل مقدار اولیه را نیز می‌توان به معادله‌ی انتگرالی ولترا تبدیل کرد.

فصل ۲

معادلات انتگرالی ولترا ـ فردهلم غیرخطی

معادلات انتگرال خطی و غیرخطی ولترا باعث ایجاد بسیاری از رشته‌های علمی، از جمله، دینامیک جمعیت، گسترش بیماری‌های همه‌گیر، و وسایل نیمه هادی گردیده است. ولترا، در سال ۱۸۸۴ کار معادلات انتگرال را شروع کرد. اما مطالعه جدی خود در سال ۱۸۹۶ آغاز کرد.

معادله انتگرال در سال ۱۸۸۸ توسط دیوبوس ـ ریمنود[۱] نام‌گذاری شد. و نام معادله انتگرال ولترا برای اولین بار در سال ۱۹۰۸ توسط لاسکو[۲] استفاده شد.

معادله انتگرال ولترا خطی و معادله دیفرانسیل در فصل‌های قبلی معرفی شده است. در این فصل به بررسی و مطالعه معادلات انتگرال ولترا با هسته نوع اول و دوم می‌پردازیم. معادله انتگرال ولترا غیرخطی با حداقل یک کران متغیری در انتگرال مشخص می‌شود معادلات انتگرال ولترا غیرخطی نوع اول و دوم به صورت زیر است:

نوع دوم:

$$u(x) = f(x) + \int_{\circ}^{x} k(x,t) F\big(u(t)\big)\,\mathrm{d}t \tag{۱.۲}$$

و نوع اول:

$$f(x) = \inf_{\circ}^{x} k(x,t) F\big(u(f)\big)\,\mathrm{d}t \tag{۲.۲}$$

می‌باشد. که در این معادلات $k(x,t)$ هسته و تابع $f(x)$ تابع حقیقی مقدار است و $F\big(u(x)\big)$ تابع غیرخطی از $u(x)$ مانند $u^{۲}(x)$، $\sin u(x)$ و $e^{u(x)}$ می‌باشد.

[۱] DuBois-Reymond

[۲] Lalesco

۱.۲ وجود جواب برای معادله انتگرال غیرخطی ولترا

در این بخش به بیان قضیه وجودی جواب برای معادله انتگرال غیرخطی ولترا می‌پردازیم که برهان آن را می‌توان در کتاب معادلات انتگرال مشاهده کرد. از این رو، شرایط وجود جواب برای این معادلات را بیان می‌کنیم.

ابتدا معادله انتگرال ولترا غیرخطی از نوع دوم زیر را در نظر بگیرید

$$u(x) = f(x) + \int_{\circ}^{x} G(x,t,u(t))\,\mathrm{d}t \tag{۳.۲}$$

تحت شرایط خاص یک جواب برای معادله انتگرال ولترا وجود خواهد داشت:

(i) تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد.

(ii) تابع $f(x)$ در شرط لیپ ـ شیتس در بازه (a,b) صدق کند یعنی

$$\big|f(x)-f(y)\big| < k|x-y| \tag{۴.۲}$$

(iii) تابع $G(x,t,u(t))$ در فاصله $a \leq x,t \leq b$ انتگرال‌پذیر و کراندار باشد و

$$\big|G(x,t,u,(t))\big| < k.$$

(iv) تابع $G(x,t,u(t))$ بایستی در شرط لیپ ـ شیتس صدق کند

$$\big|G(x,t,z)-G(x,t,z')\big| < M|z-z'|. \tag{۵.۲}$$

در این فصل بیشتر به حل معادله ولترا غیرخطی است.

۲.۲ معادله انتگرال ولترا غیرخطی از نوع دوم

این بخش را با مطالعه معادله انتگرال ولترا غیرخطی نوع دوم به صورت زیر شروع می‌کنیم.

$$u(x) = f(x) + \int_{0}^{x} k(x,t) F(u(t))\, \mathrm{d}t \tag{۶.۲}$$

که در آن $k(x,t)$ هسته و تابع $f(x)$ تابع حقیقی مقدار و $F(u(x))$ تابع غیرخطی از $u(x)$ است.

معادله ولترا غیرخطی (۶.۲) با استفاده از سه روش حل می‌شود که این سه روش عبارت‌اند از: روش تقریب متوالی، روش حل سری و روش حل تجزیه آدومیان

۱.۲.۲ روش تقریب متوالی

روش تقریب متوالی در روش تکرار پیکارد به صورت بازگشتی به شکل زیر است

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \int_{0}^{x} k(x,t) F(u_n(t))\, \mathrm{d}t, \qquad n \geq 0 \tag{۷.۲}$$

که در آن تقریب $u_0(x)$ را می‌توان یک تابع دلخواه حقیقی در نظر گرفت. که اغلب با حدس اولیه شروع می‌کنیم که بیشتر ۰ یا ۱ یا x برای $u_0(x)$ است. با استفاده از $u_0(x)$ در (۷.۲) تقریب متوالی، u_x، $k \geq 1$، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= f(x) + \int_{0}^{x} k(x,t) F(u_0(t))\, \mathrm{d}t \\
u_2(x) &= f(x) + \int_{0}^{x} k(x,t) F(u_1(t))\, \mathrm{d}t \\
u_3(x) &= f(x) + \int_{0}^{x} k(x,t) F(u_2(t))\, \mathrm{d}t \\
&\vdots \\
u_{n+1}(x) &= f(x) + \int_{0}^{x} k(x,t) F(u_n(t))\, \mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{۸.۲}$$

متعاقباً، جواب $u(x)$، با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1}(x) \tag{۹.۲}$$

مثال ۱.۲. با استفاده از روش تقریب پی‌درپی، معادله انتگرال غیرخطی ولترا زیر را حل کنید.

$$u(x) = e^{x} + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_{0}^{x} xu^{3}(t)\,\mathrm{d}t \tag{۱۰.۲}$$

که تقریب $u_0(x)$ را برابر ۱ در نظر بگیرید.

حل.

$$u_{n+1}(x) = e^{x} + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_{0}^{x} xu_n^{3}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad n \geq 0 \tag{۱۱.۲}$$

با جایگذاری (۱۰.۲) در (۱۱.۲) داریم

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= 1\\
u_1(x) &= e^{x} + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_{0}^{x} xu_0^{3}(t)\,\mathrm{d}t\\
&= 1 + x + \frac{1}{2!}x^{2} - \frac{4}{3}x^{3} - \frac{35}{24}x^{4} = \frac{67}{60}x^{5} + \cdots\\
u_2(x) &= e^{x} + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_{0}^{x} xu_1^{3}(t)\,\mathrm{d}t\\
&= 1 + x + \frac{1}{2!}x^{2} + \frac{1}{3!}x^{3} + \frac{1}{4!}x^{4} - \frac{67}{60}x^{5} + \cdots\\
u_3(x) &= e^{x} + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_{0}^{x} xu_2^{3}(t)\,\mathrm{d}t\\
&= 1 + x + \frac{1}{2!}x^{2} + \frac{1}{3!}x^{3} + \frac{1}{4!}x^{4} + \frac{1}{5!}x^{5} + \frac{1}{6!}x^{6} + \cdots = e^{x}
\end{aligned}$$

و در نتیجه جواب $u(x)$، برابر:

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = e^{x}$$

مثال ۲.۲. با استفاده از روش تقریب پی‌درپی معادله انتگرالی ولترا غیرخطی زیر را حل کنید.

$$u(x) = ۱ + \frac{۱}{۲}x^{۲} - \frac{۱}{۶}x^{۴} - \frac{۱}{۳۰}x^{۶} + \int_{۰}^{x} (x-t)u^{۲}(t)\,\mathrm{d}t, \quad u_{۰}(x) = ۱.$$

حل.

$$\begin{aligned} u_{n+۱}(x) &= ۱ + \frac{۱}{۲}x^{۲} - \frac{۱}{۶}x^{۴} - \frac{۱}{۳۰}x^{۶} + \int_{۰}^{x} (x-t)u_n^{۲}(t)\,\mathrm{d}t, \quad n \geq ۰ \\ u_{۰}(x) = ۱, u_{۱}(x) &= ۱ + \frac{۱}{۲}x^{۲} - \frac{۱}{۶}x^{۶} - \frac{۱}{۳۰}x^{۶} + \int_{۰}^{x} (x-t)u_{۰}^{۲}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= ۱ + x^{۲} - \frac{۱}{۶}x^{۴} - \frac{۱}{۳۰}x^{۶}, \\ u_{۲}(x) &= ۱ + x^{۲} + \left(\frac{۱}{۶}x^{۴} - \frac{۱}{۶}x^{۴}\right) - \frac{۱}{۹۰}x^{۶} + \cdots \\ u_{۳}(x) &= ۱ + x^{۲} + \left(\frac{۱}{۶}x^{۴} - \frac{۱}{۶}x^{۴}\right) + \left(\frac{۱}{۹۰}x^{۶} - \frac{۱}{۹۰}x^{۶}\right) + \cdots \end{aligned}$$

و ... . در نتیجه،

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = ۱ + x^{۲}$$

۳.۲ روش جواب سری

در فصل‌های قبل با روش سری آشنا شده‌اند. در این بخش جواب معادله ولترا غیرخطی را به صورت سری بدست می‌آوریم.

۱.۳.۲ معادله ولترا غیرخطی

$$u(x) = f(x) + \int_{۰}^{x} k(x,t)F(u(t))\,\mathrm{d}t,$$

را در نظر بگیرید و فرض کنید

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

آنگاه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \int_0^x k(x,t)\left(F\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\right)\,\mathrm{d}t$$

و یا

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + \cdots = T(f(x)) + \int_0^x k(x,t)F\big((a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots)\big)\,\mathrm{d}t,$$

که در آن $T\big(f(x)\big)$ سری تیلور تابع $f(x)$ است. که با حل این معادلات جواب بدست می‌آید.

مثال ۳.۲. معادله انتگرال ولترا غیرخطی زیر را به کمک روش سری حل کنید.

$$u(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x (x-t)u^2(x)\,\mathrm{d}t.$$

حل.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 \\ &\quad + \int_0^x (x-t)(a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n + \cdots)\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}(a_0^x - 1)x^3 + \frac{1}{12}(a_1^2 + 2a_0a_2 - 1)x^4 + \cdots \end{aligned}$$

با محاسبه ضرایب داریم:

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = 0, \text{ برای } n \geq 2.$$

و جواب دقیق $u(x) = 1 + x$.

مثال ۴.۲. جواب معادله ولترا ـ غیرخطی را به روش سری حل کنید.

$$u(x) = \frac{۹}{۸} + ۲x - \frac{۱}{۴}x^{۲} - \sin hx - \frac{۱}{۸}\cos h۲x + \int_{۰}^{x} (x-t)u^{۲}(t)\,\mathrm{d}t$$

حل.

$$\begin{aligned} a_{۰} + a_{۱}x + \cdots + a_{n}x^{n} + \cdots = {} & \frac{۹}{۸} + ۲x - \frac{۱}{۴}x^{۲} - \sin hx - \frac{۱}{۸}\cos h۲x \\ & + \int_{۰}^{x} (x-t)(a_{۰} + a_{۱}t + a_{۲}t^{۲} + a_{۰}t^{۳} + \cdots)^{۲}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

از انتگرال‌گیری و استفاده از سری تیلور $\sin hx$ و $\cos h۲x$ داریم:

$$\begin{aligned} & a_{۰} = ۱, a_{۱} = ۱ \\ & a_{۲} = -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲!}a_{۰}^{۲} = ۰ \\ & a_{۳} = -\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳}a_{۰}a_{۱} = \frac{۱}{۳!} \\ & a_{۴} = -\frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۶}a_{۰}a_{۲} + \frac{۱}{۱۲}a_{۱}^{۲} = ۰ \\ & a_{۵} = -\frac{۱}{۱۲۰} + \frac{۱}{۱۰}a_{۱}a_{۲} + \frac{۱}{۱۰}a_{۰}a_{۳} = \frac{۱}{۵!}, \ldots \end{aligned}$$

در نتیجه

$$u(x) = ۱ + \left(x + \frac{۱}{۳!}x^{۳} + \frac{۱}{۵!}x^{۵} + \cdots\right) = ۱ + \sin hx.$$

۲.۳.۲ روش تجزیه آدومیان

معادله انتگرالی ولترا غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.

$$u(x) = f(x) + \int_{۰}^{x} k(x,t)F\big(u(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

که در آن $F(u(t))$ تابع غیرخطی از $u(x)$ است این معادله شامل جمله خطی $u(x)$ و تابع غیرخطی $F(u(x))$ است جمله $u(x)$ را می‌توان به شکل زیر نمایش داد

$$u(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} u_n(x)$$

قسمت غیرخطی آن به صورت سری نامتناهی که چندجمله‌ای A_n آدومیان نامیده می‌شود به شکل زیر است:

$$A_n = \frac{۱}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[F\left(\sum_{i=۰}^{n}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=۰}, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \dots$$

مثال ۵.۲. معادله انتگرال ولترا ـ غیرخطی زیر را به روش تجزیه آدومیان حل کنید.

$$u(x) = x + \int_{۰}^{x} u^{۲}(t)\,\mathrm{d}t$$

حل.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} u_n(x) = x + \int_{۰}^{x}\sum_{n=۰}^{\infty} A_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

که در آن A_n چندجمله‌ای آدومیان برای $u^{۲}(x)$ است. با استفاده از روش تجزیه آدومیان داریم:

$$u_{۰}(x) = x, u_{k+۱}^{(x)} = \int_{۰}^{x} A_k(t)\,\mathrm{d}t, \qquad k \geq ۰$$

پس

$$\begin{aligned}
&u_{۰}(x) = x\\
&\quad u_{۱}(x) = \int_{۰}^{x} A_{۱}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{۰}^{x} u_{۰}^{۲}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{۱}{۳}x^{۳}\\
&\quad u_{۲}(x) = \int_{۰}^{x}\big(۲u_{۰}(t)u_{۱}(t)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{۲}{۱۵}x^{۵}\\
&\quad u_{۳}(x) = \int_{۰}^{x}\big(۲u_{۰}(t)u_{۲}(t) + u_{۱}^{۲}(t)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{۱۷}{۳۱۵}x^{۷}, \dots
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$u(x) = x + \frac{۱}{۳}x^{۳} + \frac{۲}{۱۵}x^{۵} + \frac{۱۷}{۳۱۵}x^{۷} + \cdots$$

و این به جواب دقیق $u(x) = \tan x$ همگراست.

مثال ۶.۲. معادله انتگرالی ولترا غیرخطی زیر را به روش تجزیه آدومیان حل کنید.

$$u(x) = \sin x + \frac{۱}{۴}\sin^{۲} x - \frac{۱}{۴}x^{۲} + \int_{۰}^{x} (x-t)u^{۲}(t)\,\mathrm{d}t.$$

حل.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} u_n(x) = \sin x + \frac{۱}{۴}\sin^{۲} x - \frac{۱}{۴}x^{۲} + \int_{۰}^{x} (x-t)\sum_{n=۰}^{\infty} A_n(t)\,\mathrm{d}t$$

که در آن A_n چندجمله‌ای آدومیان برای $u^{۲}(x)$ است. با استفاده از روش تجزیه آدومیان داریم:

$$\begin{aligned}
u_{۰}(x) &= \sin x + \frac{۱}{۴}\sin^{۲} x \\
u_{۱}(x) &= -\frac{۱}{۴}x^{۲} + \int_{۰}^{x}(x-t)A_{۰}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{۱}{۴}x^{۲} + \int_{۰}^{x}(x-t)u_{۰}^{۲}(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{۱}{۴}\sin^{۲} x + \cdots \\
u_{k+۱}(x) &= \int_{۰}^{x}(x-t)A_k(t)\,\mathrm{d}t, \qquad k \geq ۱ \Rightarrow u(x) = \sin x
\end{aligned}$$

فصل ۳

روش هموتوپی و اختلال هموتوپی و کاربردهای آن

برای توضیح و شرح جزئیات این فصل، ابتدا روی آنالیز هموتوپی و اختلال هموتوپی بحث خواهد شد.

البته جهت روشن‌تر شدن بحث اختلال هموتوپی، مختصری در مورد نظریه‌ی اختلال می‌آوریم.

۱.۳ نظریه‌ی اختلالات

نظریه‌ی اختلالات[۱]، روش‌های تکراری برای حل تقریبی مسائلی که دارای عامل مزاحم یا اختلال (Perturb) می‌باشند، ارائه می‌دهد. این عامل که سبب عدم حل مسأله می‌گردد، معمولاً به عدد کوچکتر وابسته است و با چشم‌پوشی از آن، مسأله قابل حل می‌شود. این ضریب را با ε نمایش می‌دهند و مسأله‌ای که شامل این ضریب باشد را می‌توان به فرم زیر نمایش داد

$$f(x_n;\varepsilon)=\sum_n f_n(x_i)\varepsilon^n \qquad (۱.۳)$$

البته وقتی معادله‌ی (۱.۳) نتواند جوابگو باشد، می‌توان از رابطه‌ی کلی‌تر زیر استفاده نمود.

$$f(x_n;\varepsilon)=\sum_n f_n(x_i)g_n(\varepsilon) \qquad (۲.۳)$$

روش‌هایی که با ساختن سری‌های مفیدی به شکل معادلات (۱.۳) و (۲.۳) به حل معادلات می‌پردازد، روش‌های اختلالات نامیده می‌شوند.

مثال ۱.۳. به‌عنوان مثال هر یک از معادلات زیر از مسائلی هستند که با حذف عامل اختلال $۰/۰۲y^۲, ۰/۱x$ به معادلات بدون اختلال تبدیل می‌شوند.

$$x^۳-۰/۰۰۱x-۱=۰ \qquad (۳.۳)$$

[۱] Perturbation Theory

$$y'' + ۲y + ۰/۰۲y^۲ = ۰ \tag{۴.۳}$$

می‌توان بجای معادله‌ی (۴.۳) به حل معادله‌ی زیر پرداخت

$$y'' + ۲y + \varepsilon y^۲ = ۰ \tag{۵.۳}$$

لازم به تذکر است که روش اختلالات آنقدر مؤثر است که حتی بعضی اوقات مقتضی است برای مسائل مشکلی که دارای عامل کوچک نیستند، یک ε تعریف نموده و پس از حل با قرار دادن $\varepsilon = ۱$، جواب مسأله اصلی را پیدا نمود.

۲.۳ سری اختلالات و حل معادلات معمولی

برای معرفی بهتر نظریه‌ی اختلالات به بیان چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۲.۳. معادله‌ی درجه‌ی دوم زیر را در نظر می‌گیریم.

$$x^۲ - ۴/۰۰۱x + ۰/۰۰۲ = ۰ \tag{۶.۳}$$

این مسأله، مسأله‌ی اختلال نیست. چون ضریب کوچک ε در آن وجود ندارد و تبدیل آن به یک مسأله اختلال ممکن است آسان نباشد، ولی معادله‌ی فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$x^۲ - (۴ + \varepsilon)x + ۲\varepsilon = ۰ \tag{۷.۳}$$

که در آن $\varepsilon = ۰/۰۰۱$.

لذا جواب‌های این معادله به صورت تابعی از ε است و می‌توان نوشت:

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \varepsilon^n \tag{۸.۳}$$

برای بدست آوردن اولین جواب این سری، کافی است در معادله‌ی (۷.۳) ، ε را برابر صفر قرار دهیم. لذا خواهیم داشت.

$$x(0) = a_0 = -2, 0, 2 \tag{۹.۳}$$

برای بدست آوردن جواب از مرتبه‌ی دوم، برای اولین ریشه یعنی ۲− داریم.

$$x_1 = -2 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3) \tag{۱۰.۳}$$

با جایگذاری این جواب در معادله‌ی (۷.۳) و با مساوی صفر قرار دادن ضرایب ε^0 و ε^2 مقادیر a_1 و a_2 بدست می‌آید.

$$a_1 = -1/2$$

$$a_2 = 1/8$$

لذا بسط سری اختلالات برای ریشه‌ی $x_1 = -2$ برابر است با

$$x_1 = -2 - 1/2\varepsilon + 1/8\varepsilon^2 + \cdots \tag{۱۱.۳}$$

با قرار دادن $\varepsilon = 0/001$ یکی از ریشه‌های مسأله با دقت 10^{-9} بدست می‌آید. به همین ترتیب برای ریشه‌های دیگر داریم:

$$x_2 = 0 + 1/2\varepsilon - 1/8\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3) \tag{۱۲.۳}$$

$$x_3 = 2 + o(\varepsilon) + o(\varepsilon^2) + o(\varepsilon^3) \tag{۱۳.۳}$$

این مثال سه مرحله را در تحصیل نظریه‌ی اختلالات نشان می‌دهد که عبارتند از:

۱. تبدیل مسأله‌ی اصلی به مسأله‌ی اختلالات به وسیله‌ی معرفی یک پارامتر کوچک ε.

۲. فرض عبارتی برای جواب به صورت سری اختلالات و معادله‌ی ضرایب آن سری.

۳. پیدا کردن جواب مسأله‌ی اصلی بوسیله‌ی جمع کردن سری اختلالات به ازای مقدار ε در نظر گرفته شده.

مثال ۳.۳. ریشه‌ی معادله‌ی زیر را در نزدیکی $x = ۱$ با اختلال مرتبه‌ی اول و سوم به دست می‌آوریم.

$$x^۳ - ۰/۱x - ۱ = ۰ \tag{۱۴.۳}$$

با در نظر گرفتن $\varepsilon = ۰/۱$، معادله‌ی فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$x^۳ - \varepsilon x - ۱ = ۰ \tag{۱۵.۳}$$

ابتدا ریشه‌ی معادله را بدون در نظر گرفتن اختلال محاسبه می‌کنیم، یعنی $\varepsilon = ۰$

$$x_۰^۳ - ۱ = ۰ \tag{۱۶.۳}$$

که برابر با $x_۰ = ۱$ است. خطای جواب در این مورد $-۰/۱$ است.

حال به جستجوی جوابی به صورت زیر می‌پردازیم.

$$x(\varepsilon) = x_۰ + x_۱\varepsilon \tag{۱۷.۳}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۷.۳) در (۱۵.۳) داریم.

$$(x_۰ + x_۱\varepsilon)^۳ - \varepsilon(x_۰ + x_۱\varepsilon) - ۱ = ۰ \tag{۱۸.۳}$$

و با قرار دادن $x_۰ = ۱$ در معادله‌ی فوق، می‌یابیم:

$$(۳x_۱ - ۱)\varepsilon + (۳x_۱^۲ - x_۱)\varepsilon^۲ + x_۱^۲\varepsilon^۳ = ۰ \tag{۱۹.۳}$$

که با صفر قرار دادن ضرایب ε، جواب با اختلال مرتبه‌ی اول

$$x_{۱} = ۱/۳ \tag{۲۰.۳}$$

بدست می‌آید. بنابراین

$$x(\varepsilon) = ۱ + ۱/۳(\varepsilon) \tag{۲۱.۳}$$

با قرار دادن $\varepsilon = ۰/۱$ در رابطه‌ی (۲۱.۳) جوابی برابر زیر بدست می‌آید.

$$x = ۱/۰\overline{۳} \tag{۲۲.۳}$$

که دارای خطای $۳/۷ \times ۱۰^{-۵}$ در این مرحله است.

برای بدست آوردن اختلال مرتبه‌ی سوم قرار می‌دهیم

$$x(\varepsilon) = x_{۰} + a_{۱}x + a_{۲}x^{۲} + x_{۳}\varepsilon^{۳} \tag{۲۳.۳}$$

که با جایگذاری در معادله‌ی (۱۵.۳) می‌یابیم.

$$(۳x_{۱} - ۱)\varepsilon + (۳x_{۱}^{۲} + ۳x_{۲} - x_{۱})\varepsilon^{۲} + (x_{۱}^{۳} + ۳x_{۳} - x_{۲})\varepsilon^{۳} + o(\varepsilon^{۴}) = ۰ \tag{۲۴.۳}$$

لذا با صفر قرار دادن تمام ضرایب ε داریم

$$x_{۱} = -۱/۳$$

$$x_{۲} = ۰$$

$$x_{۳} = -۱/۸۱$$

و از آنجا

$$x(\varepsilon) = ۱ + \frac{۱}{۳}\varepsilon + o(\varepsilon^{۲}) - \frac{۱}{۸۱}\varepsilon^{۳} \tag{۲۵.۳}$$

که با قرار دادن $\varepsilon = ۰/۱$ جواب برابر با $x = ۱/۰۳۳۳۲۱$ و خطای آن برابر با ۱۰۳×۱۰^{-۶} خواهد بود.

حال با این توضیحات در مورد اختلالات به تشریح آنالیز هموتوپی و اختلال هموتوپی می‌پردازیم.

۳.۳ روش آنالیز هموتوپی

۱.۳.۳ مقدمه

در سال ۱۹۹۲ لیائو[۲] نظریات اساسی هموتوپی در توپولوژی را برای ساخت یک روش تحلیلی، به‌نام روش آنالیز هموتوپی برای حل مسائل غیرخطی بیان کرد. رفته‌رفته اصلاحاتی را روی این روش انجام داد و در سال ۲۰۰۴ کتاب خود را با نام مقدمه‌ای بر آنالیز هموتوپی ارائه کرد [۹].

روش آنالیز هموتوپی یک روش کلی است که روش‌های اختلال، پارامتر کوچک مصنوعی لیاپونف،تجزیه آدومیان و ... حالت‌های خاصی از آن هستند. این روش در حل انواع مختلف معادلات دیفرانسیل غیرخطی مانند نوسان‌های غیرخطی، شارش‌های لایه‌ای مرزی، انتقال حرارت و شارش‌های هیدرودینامیکی مغناطیسی سیالات غیر نیوتونی و ... کارا و سودمند است و جواب‌هایی با دقت بالا ارائه می‌دهد.

۲.۳.۳ ساختار کلی روش آنالیز هموتوپی

برای نشان دادن ایده اصلی روش آنالیز هموتوپی، معادله‌ی عمومی

$$A\big[(u(t)\big] = g(t), \tag{۲۶.۳}$$

[۲] Liao

را در نظر می‌گیریم، که در آن A عملگر غیرخطی، t نشانگر زمان و $u(t)$ یک تابع نامعلوم و $g(t)$ یک تابع معلوم است. فرض کنیم $v_\circ(t)$ تقریب اولیه مسئله باشد و L عملگر خطی باشد، با این خاصیت که اگر $L(f) = \circ$ آن‌گاه $f = \circ$. حال هموتوپی زیر را می‌سازیم:

$$(۱ - q)L\big[\phi(t, q) - v_\circ(t)\big] = qhH(t)\big\{A[\phi(t, q)] - g(t)\big\}, \qquad (۲۷.۳)$$

که در آن $q \in [\circ, ۱]$ یک پارامتر بوده و $\phi(t, q)$ تابعی از t و q، h یک پارامتر ناصفر و $H(t)$ یک تابع کمکی ناصفر است. وقتی که $q = \circ$ داریم:

$$L\big[\phi(t, \circ) - v_\circ(t)\big] = \circ$$

در نتیجه

$$\phi(t, \circ) = v_\circ(t),$$

و زمانی که $q = ۱$ داریم:

$$hH(t)\Big\{A\big[\phi(t, ۱)\big] - g(t)\Big\} = \circ,$$

و با توجه به اینکه $h, H(t)$ مخالف صفر هستند، خواهیم داشت:

$$A\big[\phi(t, ۱)\big] - g(t) = \circ,$$

و این یعنی

$$\phi(t, ۱) = v(t). \qquad (۲۸.۳)$$

با توجه به مطالب فوق، هرگاه پارامتر q از صفر تا یک صعود می‌کند، $\phi(t, q)$ از تقریب اولیه $v_\circ(t)$ به جواب $v(t)$ تغییر می‌کند. در توپولوژی این نوع تغییر پیوسته را دگردیسی[۳] گویند و معادله را

[۳] deformation

معادله‌ی (۲۷.۳) دگردیسی مرتبه‌ی صفر می‌نامند.

ما آزادی زیادی در انتخاب پارامتر کمکی h، تابع کمکی $H(t)$، تقریب اولیه $v_\circ(t)$ و عملگر خطی L داریم. فرض کنیم که همگی آنها بطور مناسب انتخاب شوند و مشتق مرتبه mام تابع $\phi(t,q)$ نسبت به q برای $m = ۱, ۲, \ldots$ موجود باشد. حال تعریف می‌کنیم:

$$v_\circ^{[m]}(t) = \frac{\partial^m \phi(t,q)}{\partial q^m} \mid_{q=\circ} . \qquad (۲۹.۳)$$

برای اختصار $v_\circ^{[m]}(t)$ مشتق دگردیسی مرتبه m نامیده می‌شود. همچنین تعریف می‌کنیم:

$$v_m(t) = \frac{v_\circ^{[m]}(t)}{m!} = \frac{\partial^m \phi(t,q)}{m!\partial q^m} \mid_{q=\circ}, \qquad (۳۰.۳)$$

بسط تیلور $\phi(t,q)$ را نسبت به q به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\phi(t,q) = \phi(t,\circ) + \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{۱}{m!} \frac{\partial^m \phi(t,q)}{\partial q^m} \mid_{q=\circ} q^m, \qquad (۳۱.۳)$$

با توجه به تقریب اولیه مسئله و تعاریف فوق معادله را می‌توان به صورت

$$\phi(t,q) = v_\circ(t) + \sum_{m=۱}^{\infty} v_m(t) q^m \qquad (۳۲.۳)$$

نوشت. حال فرض می‌کنیم که h و $H(t)$، تقریب اولیه $v_\circ(t)$ و عملگر خطی L چنان انتخاب شوند که سری فوق در $q = ۱$ همگرا باشد پس در $q = ۱$ سری بصورت

$$\phi(t,۱) = v_\circ(t) + \sum_{m=۱}^{\infty} v_m(t), \qquad (۳۳.۳)$$

نوشته می‌شود. بنابراین با توجه به معادله‌ی (۲۸.۳) داریم:

$$v(t) = v_\circ(t) + \sum_{m=۱}^{\infty} v_m(t). \qquad (۳۴.۳)$$

معادله‌ی بالا یک رابطه بین تقریب اولیه و جواب دقیق را نشان می‌دهد که $v_m(t)$ها در ادامه مشخص می‌شوند.

حالا بردار $\overrightarrow{V}_n = \{v_۰(t), v_۱(t), v_۲(t), \ldots, v_n(t)\}^T$ را تعریف می‌کنیم. بنابر معادله حاکم و شرایط اولیه متناظر $v_m(t)$ را می‌توان ازمعادلات دگردیسی مرتبه ی صفر نتیجه گرفت. با mبار مشتق گرفتن از معادله‌ی (۲۷.۳) نسبت به پارامتر q و قرار دادن $q = ۰$ و در نهایت تقسیم کردن آنها بر $m!$، معادله‌ی دگردیسی از مرتبه‌ی m

$$L\big[v_m(t) - \chi_m v_{m-۱}(t)\big] = hH(t)R_m(\overrightarrow{V}_{m-۱}) \tag{۳۵.۳}$$

را داریم که در آن

$$R_m(\overrightarrow{V}_{m-۱}) = \frac{۱}{(m-۱)!}\frac{\partial^{m-۱}A\big[\phi(t,q)\big] - g(t)}{\partial q^{m-۱}} \mid q = ۰, \tag{۳۶.۳}$$

و

$$\chi_m = \begin{cases} ۰, & m \leq ۱, \\ ۱, & m > ۱. \end{cases} \tag{۳۷.۳}$$

توجه داریم که $R_m(\overrightarrow{V}_{m-۱})$ در بالا تنها به $v_{m-۱}(t), \ldots, v_۲(t), v_۱(t), v_۰(t)$ بستگی دارد که با حل معادلات دگردیسی از مرتبه‌ی m تعیین می‌شود. تقریب مرتبه mام $v(t)$ برابر است با

$$v(t) = \sum_{n=۰}^{m} v_n(t) \tag{۳۸.۳}$$

تذکر. در روش آنالیز هموتوپی جواب مسئله را برحسب توابع پایه‌ای مختلفی می‌توان تقریب زد، این توابع پایه با توجه به ماهیت مسئله و شرایط اولیه انتخاب می‌شوند که به آن اصطلاحاً قاعده تعبیرجواب[۴] می‌گویند. همچنین با آزادی در انتخاب $H(t)$ ما می‌توانیم برخی ضرایب جواب را

[۴] rule of solution expression

اصلاح کنیم. با توجه به مطالب بالا با انتخاب مناسب L و $H(t)$ و $v_\circ(t)$ سری جواب برحسب h بدست می‌آید، لذا ناحیه وشعاع همگرایی سری وابسته به h است و با انتخاب مناسب h می‌توان آنها را بزرگتر کرد. یعنی h پارامتر کنترل ناحیه و شعاع همگرایی سری جواب می‌باشد.

برای مشخص نمودن بهترین مقدار h برای همگرایی سری جواب، می‌توان $u(\circ)$ را بدست آورد و نمودار آن بر حسب h رسم نمود که به آن منحنی h گویند. آن قسمت از نمودار که تقریباً به صورت خط افقی رسم شده، ناحیه قابل قبول h را نشان می‌دهد.

لازم به ذکر است که در اکثر مسائل با توجه به اینکه $u(\circ)$ مقدار ثابتی است می‌توان نمودار h مربوط به $u''(\circ)$ و $u'''(\circ)$ را رسم کرد.

مثال ۴.۳. معادله‌ی دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$u''(t) + \omega^۲ u(t) = \circ, \quad u(\circ) = u'(\circ) = \circ. \tag{۳۹.۳}$$

اثبات. فرض کنیم جواب معادله بر حسب توابع پایه $\{t^m \mid m = ۱, ۲, \ldots\}$ به صورت

$$u(t) = \sum_{m=\circ}^{\infty} a_m t^m, \tag{۴۰.۳}$$

و با شرط $u_\circ(t) = ۱$ باشد. با توجه به صورت مسئله عملگر A را

$$A\big[\phi(t,q)\big] = \frac{\partial^۲ \phi(t,q)}{\partial t^۲} + \omega^۲ \phi(t,q) \tag{۴۱.۳}$$

تعریف می‌کنیم. حال عملگر خطی L را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$L\big[\phi(t,q)\big] = \frac{\partial^۲ \phi(t,q)}{\partial t^۲}, \tag{۴۲.۳}$$

معادله‌ی دگردیسی مرتبه صفر به شکل

$$(۱ - q) L\big[\phi(t,q) - u_\circ(t)\big] = qhH(t) A\big[\phi(t,q)\big] - g(t), \tag{۴۳.۳}$$

با شرط اولیه

$$\phi(t,\circ) = u_\circ(t) = ۱, \qquad (۴۴.۳)$$

را می‌سازیم که در آن $h \neq \circ$ پارامتر کمکی و $H(t) \neq \circ$ تابع کمکی و q یک پارامتر است. حال $u_m(t)$ را به شکل

$$u_m(t) = \frac{۱}{m!}\frac{\partial^m \phi(t,q)}{\partial q^m} \mid q = \circ, \qquad (۴۵.۳)$$

تعریف می‌کنیم. بسط تیلور $\phi(t,q)$ نسبت به پارامتر q به صورت زیر است:

$$\phi(t,q) = \phi(t,\circ) + \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{۱}{m!}\frac{\partial^m \phi(t,q)}{\partial q^m} \mid_{q=\circ} q^m, \qquad (۴۶.۳)$$

بنابر توضیحات داده شده داریم:

$$\phi(t,q) = u_\circ(t) + \sum_{m=۱}^{\infty} u_m(t) q^m, \qquad (۴۷.۳)$$

فرض می‌کنیم که h، $H(t)$ و $u_\circ(t)$ و L بطور مناسب انتخاب شوند بطوریکه سری فوق در $q = ۱$ همگرا باشد. پس داریم :

$$u(t) = u_\circ(t) + \sum_{m=۱}^{\infty} u_m(t). \qquad (۴۸.۳)$$

بردار $\overrightarrow{u}_n = \{u_\circ(t), u_۱(t), u_۲(t), \ldots, u_n(t)\}^T$ را در نظر می‌گیریم. با mبار مشتق گرفتن از معادله‌ی دگردیسی مرتبه‌ی صفر نسبت به پارامتر q و قرار دادن $q = \circ$ و در نهایت تقسیم کردن آنها بر $m!$ معادله‌ی دگردیسی از مرتبه mام

$$L\big[u_m(t) - \chi_m u_{m-۱}(t)\big] = hH(t)R_m(\overrightarrow{u}_{m-۱}), \qquad (۴۹.۳)$$

با شرط اولیه $u_m(۰) = ۰$ که در آن

$$R_m(\overrightarrow{u}_{m-۱}) = u''_{m-۱}(t) + \omega^۲ u_{m-۱}(t), \tag{۵۰.۳}$$

می‌باشد. با فرض $H(t) = ۱$ و قرار دادن $m = ۱, ۲, \dots$ معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$m = ۱ : u''_۱(t) = h\big(u''_۰(t) + \omega^۲ u_۰(t)\big), \tag{۵۱.۳}$$

$$m = ۲ : u''_۲(t) - u''_۱(t) = h\big[u''_۱(t) + \omega^۲ u_۱(t)\big], \tag{۵۲.۳}$$

$$\vdots$$

با حل معادلات دگردیسی بدست آمده به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
u_۱(t) &= h\omega^۲ \frac{t^۲}{۲},\\
u_۲(t) &= (۱+h)h\omega^۲\frac{t^۲}{۲} + h^۲\omega^۴\frac{t^۴}{۴!},\\
u_۳(t) &= (۱+h)\left[(۱+h)h\omega^۲\frac{t^۲}{۲} + h^۲\omega^۴\frac{t^۴}{۴!}\right] + (۱+h)h^۲\omega^۴\frac{t^۴}{۴!} + h^۳\omega^۶\frac{t^۶}{۶!},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

و جواب مسئله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u(t) = \sum_{i=۱}^{\infty} u_i(t). \tag{۵۳.۳}$$

□

قضیه ۵.۳. هرگاه سری جواب همگرا باشد و در معادلات دگردیسی مراتب بالا صدق کند، در این صورت سری حاصل، جواب دقیق مسئله می‌باشد.

اثبات. اگر سری $\sum\limits_{m=0}^{\infty} u_m(t)$ همگرا باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$S(t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t) \tag{۵۴.۳}$$

$$, \lim_{m\to\infty} u_m(t) = 0 \tag{۵۵.۳}$$

با استفاده از تعریف χ_m داریم:

$$\sum_{m=1}^{n} \big[v_m(t) - \chi_m v_{m-1}(t)\big] = v_1 + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \cdots (v_n - v_{n-1}) = v_n, \tag{۵۶.۳}$$

در نتیجه خوهیم داشت :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \big[v_m(t) - \chi_m v_{m-1}(t)\big] = \lim_{n\to\infty} v_n(t) = 0, \tag{۵۷.۳}$$

بعلاوه، با استفاده از عبارت فوق و نیز تعریف L داریم:

$$\sum_{m=1}^{\infty} L\big[v_m(t) - \chi_m v_{m-1}(t)\big] = L\sum_{m=1}^{\infty} \big[v_m(t) - \chi_m v_{m-1}(t)\big] = 0. \tag{۵۸.۳}$$

از عبارت حاصله و معادله‌ی دگردیسی مرتبه‌ی m بدست می‌آوریم:

$$\sum_{m=1}^{\infty} L\big[v_m(t) - \chi_m v_{m-1}(t)\big] = hH(t)\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}) = 0. \tag{۵۹.۳}$$

از آنجایی که $h \neq 0$ و $H(t) \neq 0$ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}) = 0, \tag{۶۰.۳}$$

از رابطه‌ی (۵۰.۳) داریم:

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}) = \sum_{m=1}^{\infty}(u''_{m-1}(t) + \omega^2 u_{m-1}(t)) \tag{۶۱.۳}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} u''_{m-1}(t) + \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} u_{m-1}(t),$$

در نتیجه

$$S''(t) + \omega^2 S(t) = 0, \tag{۶۲.۳}$$

با توجه به شرایط اولیه مسئله داریم:

$$S(0) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(0) = u_0(0) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(0) = u_0(0) = 1, \tag{۶۳.۳}$$

بنابراین با استفاده از دو عبارت فوق، $S(t)$ جواب دقیق مسئله است. □

مثال ۶.۳. معادله‌ی شرودینگر خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u_t + iu_{xx} = 0, \tag{۶۴.۳}$$

با شرط اولیه

$$u(x, 0) = e^{3ix}, \tag{۶۵.۳}$$

که در آن $i^2 = -1$ می‌باشد.

اثبات. با فرض $L = \frac{\partial}{\partial t}$ و $H(x,t) = 1$ معادله‌ی دگردیسی مرتبه mام به صورت زیر در می‌آید:

$$u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + hL^{-1}\left[R_m(\overrightarrow{u}_{m-1})\right], \tag{۶۶.۳}$$

و با قرار دادن $m = 1, 2, \ldots$ معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$m = 1: \quad u_1(x,t) = \chi_1 u_0(x,t) + hL^{-1}\left[R_1(\overrightarrow{u}_0)\right], \tag{۶۷.۳}$$

$$m = ۲: \quad u_۲(x,t) = \chi_۲ u_۱(x,t) + hL^{-۱}\left[R_۲(\overrightarrow{u}_۱)\right], \qquad (۶۸.۳)$$

$$\vdots$$

و با حل معادلات فوق به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$u_۱(x,t) = -۹ithe^{۳ix},$$

$$u_۲(x,t) = -he^{۳ix}\frac{(۹it)^۲}{۲!},$$

$$\vdots$$

به ازاء $h = -۱$ داریم:

$$u_۱(x,t) = ۹ite^{۳ix},$$

$$u_۳(x,t) = e^{۳ix}\frac{(۹it)^۲}{۲i},$$

$$\vdots$$

در نتیجه

$$u(x,t) = e^{۳ix}\left[۱ + ۹it + \frac{(۹it)^۲}{۲!} + \cdots\right] = e^{۳i(x+۳t)} \qquad (۶۹.۳)$$

که همان جواب دقیق است. □

۳.۴ روش اختلال هموتوپی

۳.۴.۱ مقدمه

در دهه‌های اخیر با توسعه سریع مسائل غیرخطی، دانشمندان و مهندسین به تکنیک‌های تحلیلی برای حل مسائل خطی و غیرخطی علاقه فراوانی پیدا کردند. در بسیاری از موارد تکنیک‌های روش اختلال به کار برده می‌شود. اما همانند دیگر تکنیک‌های تحلیلی، روش‌های اختلال نیز دارای محدودیت‌هایی است.

تقریباً همه روش‌های اختلال بر اساس یک پارامتر کوچک که باید در معادله وجود داشته باشد، پایه‌گذاری می‌شوند. ولی در اکثر مسائل غیرخطی پارامتر کوچک وجود ندارد، همچنین وارد کردن پارامترهای کوچک به مسئله نیازمند تکنیک‌های مخصوص است. یک انتخاب مناسب پارامترهای کوچک می‌تواند مارا به نتیجه ایده‌آل برساند، هر چند یک انتخاب نامناسب تأثیر بدی در نتیجه خواهد داشت. بدیهی است این نواقص، ناشی از ایجاد یک پارامتر کوچک در مسئله است.

برای رفع چنین محدودیت‌هایی در سال ۱۹۹۸ جی‌هوان‌هی[5] روش اختلال هموتوپی را معرفی کرد. این روش نیاز به پارامتر کوچک در معادله ندارد. در این روش طبق تکنیک هموتوپی در توپولوژی یک هموتوپی با یک پارامتر $p \in [0, 1]$ ساخته می‌شود و این پارامتر به صورت یک پارامتر کوچک فرض می‌شود. این روش ترکیب هموتوپی و روش اختلال می‌باشد که در حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال خطی و غیرخطی سودمند و کارا می‌باشد. این روش در سالهای اخیر برای حل اکثر مسائل غیرخطی توسط بسیاری از دانشمندان مورد استفاده قرار می‌گیرد.

[5] J.H.He

۲.۴.۳ ساختار کلی روش اختلال هموتوپی

برای نشان دادن ایده اصلی روش اختلال هموتوپی معادله‌ی دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega \tag{۷۰.۳}$$

با شرط مرزی

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma \tag{۷۱.۳}$$

که در آن A عملگر دیفرانسیل عمومی، B عملگر مرزی، $f(r)$ تابع جبری معلوم و Γ مرز ناحیه Ω می‌باشد. عملگر A را می‌توان به دو قسمت خطی L و غیر خطی N تقسیم کرد، بنابراین رابطه‌ی (۷۰.۳) به صورت $L(u) + N(u) - f(r) = 0$ در می‌آید. به کمک تکنیک هموتوپی می‌توانیم هموتوپی $V(r,p) : \Omega \times [0,1] \to R$ را بسازیم بطوریکه شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} H(v,p) &= (1-p)\big[L(v) - L(u_0)\big] + p\big[A(v) - f(r)\big] = 0, \\ &= L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p\big[N(v) - f(r)\big] = 0, \end{aligned} \tag{۷۲.۳}$$

که در آن $p \in [0,1]$ پارامتر و u_0 تقریب اولیه است که با توجه به شرط اولیه تعمیم می‌شود. بدیهی است که از معادله‌ی (۷۲.۳) داریم:

$$H(v,0) = L(v) - L(u_0) = 0, \tag{۷۳.۳}$$

$$h(v,1) = A(v) - f(r) = 0. \tag{۷۴.۳}$$

بنابراین وقتی p از صفر به یک می‌رود، $V(r,p)$ از جواب اولیه u_0 به جواب اصلی u تغییر می‌کند. این فرآیند را در توپولوژی تغییر شکل نامیم و $L(v) - L(u_0)$ و $A(v) - f(r)$ را هموتوپیک نامیم.

به کمک تکنیک اختلال فرض می‌کنیم جواب معادله‌ی (۷۰.۳) به صورت سری توانی زیر باشد:

$$v = v_{0} + pv_{1} + p^{2}v_{2} + \cdots \tag{۷۵.۳}$$

بنابر توضیحات داده شده با قرار دادن $p = 1$ جواب تقریبی بدست می‌آید:

$$u = \lim_{p\to 1} v = v_{0} + v_{1} + v_{2} + \cdots \tag{۷۶.۳}$$

با جایگذاری (۷۵.۳) در (۷۲.۳) ومساوی صفر قرار دادن ضرایب توانهای p معادلاتی حاصل می‌شود که با حل آن‌ها v_iها مشخص می‌شوند و بدین ترتیب جواب u حاصل می‌شود.

نکته ۷.۳. روش اختلال هموتوپی حالت خاصی از روش آنالیز هموتوپی است. اگر در معادله‌ی (۲۷.۳) قرار دهیم $h = -1$ و $H(t) = 1$ همان فرمول اختلال هموتوپی حاصل می‌شود.

۳.۴.۳ کاربرد روش اختلال هموتوپی

مثال ۸.۳. معادله‌ی دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید [۱۵]:

$$u_t + (u^{2})_x + (u^{2})_{xxx} = 0, \tag{۷۷.۳}$$

یا بطور معادل

$$u_t + 2uu_x + 2uu_{xxx} + 6u_xu_{xx} = 0, \tag{۷۸.۳}$$

با شرط اولیه

$$u(x, 0) = x. \tag{۷۹.۳}$$

اثبات. با فرض $L = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ و با استفاده از روش اختلال هموتوپی، می‌توانیم هموتوپی را به شکل

$$(1-p)[v_t - u_{0t}] + p[v_t + 2vv_x + 2vv_{xxx} + 6v_x v_{xx}] = 0, \tag{۸۰.۳}$$

بسازیم. با جایگذاری $v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots$ در معادله‌ی فوق و مساوی صفر قرار دادن ضرایب توانهای یکسان p معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$p^0:\ v_{0t} - u_{0t} = 0,\ v_0(x,0) = x,$$

$$p^1:\ v_{1t} + u_{0t} + 2v_0 v_{0x} + 6v_{0x}v_{0xx} + 2v_0 v_{0xxx} = 0,\ v_1(x,0) = 0,$$

$$p^2: v_{2t} + 2v_{0x}v_1 + 2v_{1x}v_0 + 2v_{0xxx}v_1 + 2v_{1xxx}v_0 + 6v_{0xx}v_{1x} + 6v_{1xx}v_{0x} = 0,$$

$$\vdots$$

که با حل معادلات فوق به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$v_0(x,t) = x,$$

$$v_1(x,t) = -2xt,$$

$$v_2(x,t) = 4xt^2$$

$$\vdots$$

بنابراین جواب مسئله به صورت

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) = x(1 - 2t + 4t^2 - 8t^3 + \cdots) = \frac{x}{1+2t}, \tag{۸۱.۳}$$

خواهد بود که همان جواب دقیق معادله می‌باشد. □

مثال ۹.۳. معادله‌ی دیفرانسیل زیر را در نظربگیرید:

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 0,\ u(0) = 1,\ u'(0) = 0. \tag{۸۲.۳}$$

اثبات. با فرض $L(v)=\frac{d^2v}{dt^2}$ و با استفاده از روش اختلال هموتوپی، می‌توانیم هموتوپی را به شکل

$$H(v,p)=(1-p)\left[\frac{d^2v}{dt^2}-\frac{d^2u_0}{dt^2}\right]+p\left[\frac{d^2v}{dt^2}+\omega^2 v\right]=0, \tag{۸۳.۳}$$

بسازیم. با جایگذاری $v=v_0+pv_1+p^2v_2+\cdots$ در معادله‌ی فوق و مساوی صفر قرار دادن ضرایب توانهای یکسان p معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
p^0 &: \ \frac{d^2v_0}{dt^2}-\frac{d^2u_0}{dt^2}=0,\ v_0(0)=1,\ v_0'(0)=0,\\
p^1 &: \ \frac{d^2v_1}{dt^2}+\frac{d^2u_0}{dt^2}+\omega^2v_0=0,\ v_1(0)=0,\ v_1'(0)=0,\\
p^2 &: \ \frac{d^2v_2}{dt^2}+\omega^2v_1=0,\ v_2(0)=0,\ v_2'(0)=0,\\
p^3 &: \ \frac{d^2v_3}{dt^2}+\omega^2v_2=0,\ v_3(0)=0,\ v_3'(0)=0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

که با حل معادلات فوق به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
v_0(t)&=1,\\
v_1(t)&=-\frac{1}{2}\omega^2t^2,\\
v_2(t)&=\frac{1}{4!}\omega^4t^4,\\
v_3(t)&=-\frac{1}{6!}\omega^6t^6,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

بنابراین جواب مسئله به صورت

$$u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)=1-\frac{1}{2}\omega^2t^2+\frac{1}{4!}\omega^4t^4-\frac{1}{6!}\omega^6t^6+\cdots \tag{۸۴.۳}$$

خواهد بود. لذا جواب را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

$$u(t) = \cos \omega t. \tag{۸۵.۳}$$

□

مثال ۱۰.۳. معادله‌ی دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$u_t + uu_x = ۲t + x + t^۳ + xt^۲,\ u(x,\circ) = \circ. \tag{۸۶.۳}$$

اثبات. با فرض $L(v) = \dfrac{dv}{dt}$ و با استفاده از روش اختلال هموتوپی، می‌توانیم هموتوپی را به شکل

$$H(v,p) = (۱-p)[v_t - u_{\circ t}] + p[v_t + vv_x - ۲t - x - t^۳ - xt^۲] = \circ \tag{۸۷.۳}$$

بسازیم. با جایگذاری $v = v_\circ + pv_۱ + p^۲v_۲ + \cdots$ در معادله‌ی فوق و مساوی صفر قرار دادن ضرایب توانهای یکسان p معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$p^\circ:\ v_{\circ t} - u_{\circ t} = \circ,\ v_\circ(x,\circ) = \circ,$$

$$p^۱:\ v_{۱t} + u_{\circ t} + v_\circ v_{\circ x} - ۲t - x - t^۳ - xt^۲,\ v_۱(x,\circ) = \circ,$$

$$p^۲:\ v_{۲t} + v_\circ v_{۱x} + v_۱ v_{\circ x} = \circ,\ v_۲(x,\circ) = \circ,$$

$$\vdots$$

$$p^j:\ v_{kt} + \sum_{j=\circ}^{k-۱} v_j(v_{k-j-۱})x = \circ,\ v_k(x,\circ) = \circ, \quad (k \geq ۲).$$

که با حل معادلات فوق به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$v_\circ(x,t) = \circ,$$

$$v_۱(x,t) = t^۲ + xt + \frac{t^۴}{۴} + \frac{xt^۳}{۳},$$

$$v_2(x,t)=0,$$
$$v_3(x,t)=-\frac{t^4}{4}-\frac{xt^3}{3}-\frac{7t^6}{72}-\frac{2xt^5}{15}-\frac{t^8}{96},$$
$$\vdots$$

بنابراین جواب مسئله به صورت

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x,t)=t^2+xt, \tag{۸۸.۳}$$

خواهد بود. □

مثال ۱۱.۳. معادله‌ی شرودینگر[۶] غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۱۰]:

$$iu_t+u_{xx}+2u|u^2|=0,\quad u(x,0)=e^{ix}, \tag{۸۹.۳}$$

که در آن $i^2=-1$. با توجه به اینکه $|v|^2=v\overline{v}$ می‌توانیم معادله را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$u_t-iu_{xx}-2iu^2\overline{u}=0,\ u(x,0)=e^{ix} \tag{۹۰.۳}$$

اثبات. با فرض $L(v)=\frac{dv}{dt}$ و با استفاده از روش اختلال هموتوپی، می‌توانیم هموتوپی را به شکل

$$H(v,p)=(1-p)[v_t-u_{0t}]+p[v_t-iv_{xx}-2iv^2\overline{v}]=0, \tag{۹۱.۳}$$

بسازیم. با جایگذاری $v=v_0+pv_1+p^2v_2+\cdots$ در معادله‌ی فوق و مساوی صفر قرار دادن ضرایب توانهای یکسان p معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$p^0:\ v_{0t}-u_{0t}=0,\ v_0(x,0)=e^{ix},$$

[۶] Schrodinger

$$
\begin{aligned}
&p^1:\ v_{1t}+u_{0t}-iv_{0xx}-2iv_0^2\overline{v_0}=0,\ v_1(x,0)=0\\
&p^2:\ v_{2t}-iv_{1xx}-2iv_0^2\overline{v_1}-4iv_0v_1\overline{v_0}=0,\ v_2(x,0)=0,\\
&p^3:\ v_{3t}-iv_{2xx}-2iv_0^2\overline{v_2}-2iv_1^2\overline{v_0}-4iv_0v_1\overline{v_1}-4iv_0v_2v_0^2=0,\ v_3(x,0)=0,\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

که با حل معادلات فوق به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&v_0(x,t)=e^{ix},\\
&v_1(x,t)=ite^{ix},\\
&v_2(x,t)=-\frac{1}{2}t^2e^{ix},\\
&v_3(x,t)=-\frac{1}{6}it^3e^{ix},\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

بنابراین جواب مسئله به صورت

$$
\begin{aligned}
u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x,t)&=e^{ix}\left[1+it-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}it^3+\cdots\right] \qquad (۹۲.۳)\\
&=e^{ix}\left[1+it+\frac{(it)^2}{2!}+\frac{(it)^3}{3!}+\cdots\right].
\end{aligned}
$$

خواهد بود. لذا شکل بسته‌ی جواب را می‌توان به صورت $u(x,t)=e^{i(x+t)}$ بیان نمود. □

مثال ۱۲.۳. معادله‌ی شرودینگر خطی زیر را در نظر بگیرید [۱۰]:

$$
u_t+iu_{xx}=0, \qquad (۹۳.۳)
$$

با شرط اولیه

$$u(x,0) = e^{3ix}. \tag{۹۴.۳}$$

که در آن $i^2 = -1$ می‌باشد.

اثبات. با فرض $L = \dfrac{\partial}{\partial t}$ می‌توانیم هموتوپی را به‌صورت زیر بسازیم:

$$H(v,p) = (1-p)\big[v_t - u_0(t)\big] + p[v_t + iv_{xx}] = 0. \tag{۹۵.۳}$$

با جایگذاری $v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots$ در معادله‌ی فوق و مساوی صفر قرار دادن ضرایب توانهای یکسان p معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&p^0:\ v_{0t} - u_{0t} = 0,\ v_0(x,0) = e^{3ix},\\
&p^1:\ v_{1t} + u_{0t} + iv_{0xx} = 0,\ v_1(x,0) = 0,\\
&p^2:\ v_{2t} + iv_{1xx} = 0,\ v_2(x,0) = 0,\\
&p^3:\ v_{3t} + iv_{2xx} = 0,\ v_3(x,0) = 0.\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

که با حل معادلات فوق بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
v_0(x,t) &= e^{3ix},\\
v_1(x,t) &= 9ite^{3ix},\\
v_2(x,t) &= -\frac{81}{2}t^2e^{3ix},\\
v_3(x,t) &= -\frac{243}{2}it^3e^{3ix},
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

بنابراین جواب مسئله به صورت

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = e^{3ix}\left[1 + 9it - \frac{81}{2}t^2 - \frac{243}{2}it^3 + \cdots\right] \qquad (96.3)$$
$$= e^{ix}\left[1 + 9it + \frac{(9it)^2}{2!} + \frac{(9it)^3}{3!} + \cdots\right]$$

خواهد بود. لذا شکل بسته جواب را می‌توان به صورت $u(x,t) = e^{3i(x+3t)}$ بیان نمود. $\square$

۵.۳ همگرایی روش اختلال هموتوپی

همگرایی روش اختلال هموتوپی در سال ۲۰۰۹ توسط بی‌آزار[7] و قزوینی[8] به صورت یک قضیه اثبات شده است [۵].

قضیه ۱۳.۳ (شرط کافی برای همگرایی). فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $N : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت انقباض غیرخطی باشد، بطوریکه

$$\forall v, \overline{v} \in X;\ \|N(v) - N(\overline{v})\| \leq \gamma\|v - \overline{v}\|,\ 0 < \gamma < 1,$$

که مطابق قضیه‌ی نقطه ثابت باناخ، دارای نقطه‌ی ثابت u باشد، یعنی $N(u) = u$. با توجه به دنباله ساخته شده بوسیله روش اختلال هموتوپی داریم

$$V_n = N(V_{n-1}),\ V_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (97.3)$$

[7] Biazar

[8] Ghazvini

فرض کنید

$$V_\circ = v_\circ = u_\circ \in B_r(u) = \{u^* \in X \mid \|u^* - u\| < r\}. \qquad (۹۸.۳)$$

در این صورت

i) $\|V_n - u\| < \gamma^n \|v_\circ - u\|$

ii) $V_n \in B_r(u)$

iii) $\lim_{n\to\infty} V_n = u$

اثبات. (i) به استقراء روی n ثابت می‌کنیم. برای $n = ۱$ داریم:

$$\|V_۱ - u\| = \|N(V_\circ) - N(u)\| \leq \gamma \|v_\circ - u\|.$$

بنابر فرض استقراء داریم:

$$\|V_{n-۱} - u\| \leq \gamma^{n-۱} \|v_\circ - u\|.$$

پس می‌توان نوشت:

$$\|V_n - u\| = \big\|N(V_{n-۱}) - N(u)\big\| \leq \gamma\gamma^{n-۱}\|v_\circ - u\| = \gamma^n \|v_\circ - u\|.$$

(ii) به کمک (i) داریم:

$$\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_\circ - u\| \leq \gamma^n r < r \Rightarrow V_n \in B_r(u).$$

(iii) چون

$$\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_\circ - u\|,$$

و

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \gamma^n = ۰,$$

لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|V_n - u\| = ۰,$$

و این یعنی

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} V_n = u.$$

□

مثال ۱۴.۳. معادله‌ی برگر[۹] زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}, \quad (x,t) \in R \times \left[۰, \frac{۱}{۲}\right) \tag{۹۹.۳}$$

با شرط اولیه

$$u(x,۰) = ۲x. \tag{۱۰۰.۳}$$

جواب دقیق این مسئله

$$u(x,t) = \frac{۲x}{۱+۲t}, \tag{۱۰۱.۳}$$

می‌باشد. برای حل به روش اختلال هموتوپی با فرض $L = \frac{\partial u}{\partial t}$ هموتوپی زیر را می‌سازیم:

$$(۱-p)\left[\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_۰}{\partial t}\right] + p\left[\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^۲ v}{\partial x^۲}\right] = ۰. \tag{۱۰۲.۳}$$

[۹] Burger's equation

با جایگذاری $v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \cdots$ در رابطه‌ی فوق و با مساوی صفر قرار دادن ضرایب توانهای یکسان p معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
p^0 &: \ \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, \ v_0(x,0) = 2x, \\
p^1 &: \ \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0, \ v_1(x,0) = 0, \\
p^2 &: \ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0, \ v_2(x,0) = 0, \\
&\vdots \\
p^j &: \ \frac{\partial v_j}{\partial t} + \sum_{k=0}^{j-1} v_k \frac{\partial v_{j-k-1}}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_{j-1}}{\partial x^2} = 0, \ v_j(x,0) = 0.
\end{aligned}
$$

با حل معادلات فوق به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
v_0(x,t) &= 2x, \\
v_1(x,t) &= -4xt, \\
v_2(x,t) &= 8xt^2, \\
&\vdots \\
v_n(x,t) &= (-1)^n 2^{n+1} x t^n.
\end{aligned}
$$

فرض می‌کنیم $N : R \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \to R^2$ و $V_n = N(V_{n-1})$ و همچنین داریم:

$$
\begin{aligned}
V_0 &= v_0 = u_0, \\
V_n &= \sum_{j=0}^{n} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} - \sum_{k=0}^{j} v_k \frac{\partial v_{j-k}}{\partial x} \right) dt, \ n = 1, 2, \ldots, \ t \le \frac{\gamma}{2}, \ 0 < \gamma < 1.
\end{aligned}
$$

مطابق قضیه‌ی همگرایی برای نگاشت N، یک شرط کافی برای همگرایی روش اختلال هموتوپی انقباض N می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
\|V_0-u\| &= \left\|2x-\frac{2x}{1+2t}\right\| = 4\left\|\frac{xt}{1+2t}\right\|,\\
\|V_1-u\| &= \|v_0+v_1-u\| = 8\left\|\frac{xt^2}{1+2t}\right\| \le 8\left(\frac{\gamma}{2}\right)\left\|\frac{xt}{1+2t}\right\| = \gamma\|v_0-u\|,\\
\|V_2-u\| &= \|v_0+v_1+v_2-u\| = 16\left\|\frac{xt^3}{1+2t}\right\| \le 16\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\left\|\frac{xt}{1+2t}\right\| = \gamma^2\|v_0-u\|,\\
&\vdots\\
\|V_n-u\| &= \left\|\sum_{j=0}^{n} v_j-u\right\| = 2^{n+2}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^n\left\|\frac{xt}{1+2t}\right\| = \gamma^n\|v_0-u\|,
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\|V_n-u\| \le \lim_{n\to\infty}\gamma^n\|v_0-u\| = 0,$$

و این بدین‌معنی است که جواب

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{2x}{1+2t}, \tag{103.3}$$

جواب دقیق است.

۶.۳ اصلاحیه‌هایی برای روش اختلال هموتوپی

در سال‌های اخیر چند روش اصلاح شده برای روش اختلال هموتوپی ارائه شده است که در این بخش دو روش اصلاح شده را مطرح می‌کنیم.

۱.۶.۳ روش اصلاح شده اول

یک روش اصلاح شده در سال ۲۰۰۷ توسط ادیبات[۱۰] ارائه شده است [۱۰]. شکل اصلاح شده روش اختلال هموتوپی براساس این فرض که $f(r)$ می‌تواند به دو قسمت $f_0(r)$ و $f_1(r)$ تقسیم شود، بنا نهاده شده است. یا در صورتیکه تابع $f(r)$ دارای بسط تیلور باشد، می‌توان به‌جای آن

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n f_n(r), \tag{۱۰۴.۳}$$

را در نظر گرفت.

مطابق فرض اولیه $f(r) = f_0(r) + f_1(r)$. می‌توانیم هموتوپی را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} H(v,p) &= (1-p)\big[L(v) - L(v_0)\big] + p\big[L(v) + N(v) - f_1(r)\big] = f_0(r), \\ &= L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p\big[N(v) - f_1(r)\big] = f_0(r). \end{aligned} \tag{۱۰۵.۳}$$

موفقیت این روش اصلاح شده به انتخاب مناسب توابع f_0 و f_1 بستگی دارد.

مطابق فرض دوم داریم:

$$\begin{aligned} H(v,p) &= (1-p)\big[L(v) - L(u_0)\big] + p\big[L(v) + N(v)\big] = \sum_{n=0}^{\infty} p^n f_n(r), \\ &= L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + pN(v) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n f_n(r). \end{aligned} \tag{۱۰۶.۳}$$

با این اصلاحیه، محاسبه $v_0, v_1, v_2, \ldots$ ساده شده و همچنین سرعت همگرایی سری جواب بیشتر می‌شود.

مثال ۱۵.۳. معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید [۱۳]:

$$u_t + uu_x = 2t + x + t^3 + xt^2, \; u(x,0) = 0, \tag{۱۰۷.۳}$$

[۱۰] Odibat

حل. $f(r) = ۲t + x + t^۳ + xt^۲$ را به دو قسمت $f_۱(r) = t^۳ + xt^۲$ و $f_∘(r) = ۲t + x$ تقسیم می‌کنیم. با فرض $L(v) = \frac{\partial v}{\partial t}$ هموتوپی را به شکل زیر می‌سازیم:

$$(۱ - p)\big[L(v) - L(u_∘)\big] + p[vv_x - t^۳ - xt^۲] = ۲t + x.$$

با جایگذاری $v = v_∘ + pv_۱ + P^۲v_۲ + \cdots$ در رابطه‌ی فوق و مساوی صفر قرار دادن ضرایب توانهای p خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&p^∘:\ \frac{\partial v_∘}{\partial t} - \frac{\partial u_∘}{\partial t} = ۲t + x, \quad v_∘(x, ∘) = ∘,\\
&p^۱:\ \frac{\partial v_۱}{\partial t} + \frac{\partial u_∘}{\partial t} + v_∘ v_{∘x} = t^۳ + xt^۲, \quad v_۱(x, ∘) = ∘,\\
&p^۲:\ \frac{\partial v_۲}{\partial t} + v_∘ v_{۱x} + v_۱ v_{∘x} = ∘, \quad v_۲(x, ∘) = ∘,\\
&\ \vdots\\
&p^k:\ \frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{j=∘}^{k-۱} v_j (v_{k-j-۱})_x = ∘, \quad v_k(x, ∘) = ∘,\ (k \geq ۲).
\end{aligned}$$

با حل معادلات بالا، به تربیت داریم:

$$\begin{aligned}
&v_∘(x, t) = t^۲ + xt,\\
&v_i(x, t) = ∘,\ i \geq ۱.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

بنابراین جواب معادله به صورت زیر بدست می‌آید.

$$u(x, t) = \sum_{n=∘}^{\infty} u_n(x, t) = t^۲ + xt, \tag{۱۰۸.۳}$$

مثال ۱۶.۳. معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید [۱۳]:

$$u' + ۲tu = ۲te^{-t^۲},\ u(∘) = ∘, \tag{۱۰۹.۳}$$

حل. بسط تیلور تابع $f(t)$ را به صورت

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = 2t\left(1 - pt^2 + \frac{t^4}{2}p^2 - \frac{t^6}{6}p^3 + \cdots\right) \tag{۱۱۰.۳}$$

می‌نویسیسم. حال با فرض $L(v) = \dfrac{\partial v}{\partial t}$ هموتوپی را به شکل

$$(1-p)\big[L(v) - L(u_0)\big] + p[v' + 2tv] = 2t\left(1 - pt^2 + \frac{t^4}{2}p^2 - \frac{t^6}{6}p^3 + \cdots\right) \tag{۱۱۱.۳}$$

می‌سازیم. با جایگذاری $v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \cdots$ در رابطه‌ی فوق و مساوی صفر قرار دادن ضرایب توانهای یکسان از p معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&p^0 :\ v_0' - u_0' = 2t,\ v_0(0) = 0,\\
&p^1 :\ v_1' + u_0' + 2tv_0 = -2t^3,\ v_1(0) = 0,\\
&p^2 :\ v_2' + 2tv_1 = t^5\ , v_2(0) = 0\\
&p^3 :\ v_3' + 2tv_2 = -\frac{t^7}{3},\ v_3(0) = 0,\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

با حل معادلات فوق به ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
v_0(t) &= t^2\\
v_1(t) &= -t^4,\\
v_2(t) &= \frac{t^6}{2},\\
v_3(t) &= -\frac{t^8}{6},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

بنابراین جواب به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = t^2 - t^4 + \frac{t^6}{2} - \frac{t^8}{6} + \cdots = t^2\left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \cdots\right), \qquad (112.3)$$

بدست می‌آید. لذا شکل بسته جواب را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$u(t) = t^2 e^{-t^2} \qquad (113.3)$$

۲.۶.۳ روش اصلاح شده دوم

روش اصلاح شده دیگری در سال ۲۰۰۸ توسط اوزیش[11] و یلدیریم[12] ارائه شده است [۱۴]. همانطور که اشاره شد، برای حل $A(u) = f$ که در آن A عملگر دیفرانسیل عمومی و f یک تابع جبری معلوم است، یک هموتوپی به صورت

$$H(v,p) = (1-p)\big[L(v) - L(u_0)\big] + p\big[A(u) - f\big] = 0, \qquad (114.3)$$

می‌سازیم که با جایگذاری

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots, \qquad (115.3)$$

در هموتوپی و مساوی صفر قرار دادن ضرایب توان‌های p می‌توانیم v_iها را متوالیاً بدست آوریم و جواب مسئله به‌صورت

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \qquad (116.3)$$

بدست می‌آید. اما برای معادلات غیرخطی (مثلثاتی،هیپربولیک،نمایی،لگاریتمی) روش اختلال هموتوپی می‌تواند اصلاح شود، بدین صورت که یک پارامتر کوچک $p \in [0,1]$ در قسمت‌های

[11] Ozis

[12] Yildirim

غیرخطی معرفی می‌کنیم و بسط تیلور آنها را به جایشان قرار می‌دهیم، سپس همانند روش اختلال هموتوپی، سری $\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i$ را جایگزین v می‌کنیم و با مساوی صفر قرار دادن ضرایب توان‌های p، معادلات دیفرانسیل خطی غیرهمگن را بدست می‌آوریم که با حل آنها جواب تقریبی مسئله به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

مثال ۱۷.۳. مسئله مقدار اولیه براتو[۱۳] زیر را در نظر بگیرید [۱۴]:

$$u'' - 2e'' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u'(0) = 0. \tag{۱۱۷.۳}$$

حل. معادله را به‌صورت زیر دوباره‌نویسی می‌کنیم:

$$u'' - 2e^{pu} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u'(0) = 0. \tag{۱۱۸.۳}$$

برای بدست آوردن جواب تقریبی معادله، بسط تیلور e^{pu} را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$e^{pu} = 1 + pu + \frac{p^2u^2}{2!} + \frac{p^3u^3}{3!} + \cdots \tag{۱۱۹.۳}$$

با جایگذاری $v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \ldots$ و رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۱۲۲.۳) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}&(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \cdots)'' - 2\big[1 + p(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \cdots) \\ &+ \frac{p^2}{2}(v_0^2 + p^2v_1^2 + p^4v_2^2 + 2pv_0v_1 + 2p^2v_0v_2 + 2p^3v_1v_2) + \frac{p^3}{3}(v_0^3) + \cdots\big] = 0,\end{aligned} \tag{۱۲۰.۳}$$

و با مساوی صفر قرار دادن ضرایب توانهای p معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$p^0 : \; v_0'' = 2,$$

[۱۳] Bratu's initial value problem

$$\begin{aligned}
p^1 &: \ v_1'' = 2v_0, \\
p^2 &: \ v_2'' = 2v_1 + v_0^2, \\
p^3 &: \ v_3'' = 2v_0v_1 + \frac{v_0^2}{3}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

با حل معادلان فوق به‌ترتیب بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
v_0 &= x^2, \\
v_1 &= \frac{x^4}{6}, \\
v_2 &= \frac{2x^6}{45}, \\
v_3 &= \frac{17x^8}{1260}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

بنابراین جواب به صورت

$$u(x) = x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{2x^6}{45} + \frac{17x^8}{1260} + \cdots, \tag{۱۲۱.۳}$$

یا بطور معادل

$$u(x) = -2\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \cdots\right), \tag{۱۲۲.۳}$$

بدست می‌آید که همان شکل بسته $-2\ln\big(\cos(x)\big)$ می‌باشد.

۷.۳ همگرایی و خطای معادله انتگرالی فردهلم

۱.۷.۳ آنالیز همگرایی روش اختلال هموتوپی برای معادلات انتگرالی ولترا - فردهلم

معادله انتگرالی فردهلم زیر را در نظر بگیرید.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{۱۲۳.۳}$$

که در آن $x \in [a,b]$ و تابع $k \in c([a,b] \times [a,b])$ و $f \in c[a,b]$ می‌باشند. با استفاده از روش اختلال هموتوپی برای این معادله تعریف می‌کنیم:

$$L(v) = v, \quad N(v) = -\lambda \int_a^b k(x,t)v(t)dt \tag{۱۲۴.۳}$$

با استفاده از روابط روش هموتوپی فصل‌های قبلی خواهیم داشت:

$$H(v,p) = v(x) - u_\circ(x) + p\left(u_\circ(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)v(t)dt - f(x)\right) \tag{۱۲۵.۳}$$

مطابق روش هموتوپی، دنبال حل معادله $H(v,p) = \circ$ به فرم سری توانی هستم. یعنی:

$$v(x) = \sum_{j=\circ}^{\infty} p^j v_j(x). \tag{۱۲۶.۳}$$

و لذا

$$\sum_{j=\circ}^{\infty} p^j v_j(x) = u_\circ(x) + p\big(f(x) - u_\circ(x)\big) + \sum_{j=۱}^{\infty} p^j \lambda \int_a^b k(x,t)v_{j-۱}(t)dt \tag{۱۲۷.۳}$$

با مقایسه ضرایب سری‌ها داریم:

$$v_\circ(x) = u_\circ(x) \tag{۱۲۸.۳}$$

$$v_1(x) = f(x) - u_0(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) v_0 \, dt, \tag{۱۲۹.۳}$$

$$\vdots \tag{۱۳۰.۳}$$

$$v_j(x) = \lambda \int_a^b k(x,t) v_{j-1}(t) dt \qquad j \geq 2. \tag{۱۳۱.۳}$$

حال در ادامه به همگرایی سری بالا می‌پردازیم:

قضیه ۱۸.۳. فرض کنید $k(x,t)$ و $f(x)$ توابع بالا باشند. که در ناحیه‌های $\Omega_1 = [a,b] \times [a,b]$ و $\Omega = [a,b]$ به ترتیب پیوسته هستند و k و f کراندار‌اند. یعنی اعداد مثبت M و N_1 وجود دارند به طوری که

$$\left|k(x,t)\right| \leq M, \quad \left|f(x)\right| \leq N_1, \quad \forall x,t \in [a,b] \tag{۱۳۲.۳}$$

و علاوه بر این رابطه زیر برقرار باشد.

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

و تقریب اولیه u_0، در بازه $[a,b]$ تابع پیوسته باشد. آنگاه سری (۱۲۶.۳) در بازه $[a,b]$ برای هر $p \in [0,1]$ به طور یکنواخت همگراست.

اثبات. فرض کنید $u_0 \in c[0,b]$. لذا، عدد صحیح مثبت N_0 وجود دارد که

$$\left|u_0(x)\right| \leq N_0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

در نتیجه

$$\left|v_0(x)\right| = \left|u_0(x)\right| \leq N_0$$

$$\left|v_1(x)\right| = \left|f(x) - u_0(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) v_0(t) dt\right| \leq \left|f(x)\right| + \left|v_0(x)\right| + |\lambda| \int_a^b \left|k(x,t)\right| \left|v_0(t)\right| dt$$

$$
\begin{aligned}
&\le N_۱ + N_۰ + |\lambda| \int_a^b MN_۰ dt = N_۰ + N_۱ |\lambda| MN_۰ (b-a) = B, \\
\big|v_۲(x)\big| &= \left|\lambda \int_a^b k(x,t) v_۱(t) dt\right| \le |\lambda| \int_a^b \big|k(x,t)\big|\big|v_۱(t)\big| dt \\
&\le |\lambda| \int_a^b MB dt = M|\lambda| B(b-a),
\end{aligned}
$$

که در آن $B = N_۰ + N_۱ + |\lambda| MN_۰ (b-a)$. و در حالت کلی،

$$
\big|v_j(x)\big| \le B|\lambda|^{j-۱} M^{j-۱} (b-a)^{j-۱},
$$

در نتیجه برای هر $p \in [۰, ۱]$،

$$
\sum_{j=۰}^{\infty} p^j v_j(x) \le \sum_{j=۰}^{\infty} \big|v_j(x)\big| \le \sum_{j=۰}^{\infty} B|\lambda|^{j-۱} M^{j-۱} (b-a)^{j-۱}.
$$

که سری آخر سری هندسی با قدر نسبت $q = |\lambda| M(b-a) < ۱$ همگراست. بنابراین سری (۱۲۶.۳) به طور یکنواخت در بازه $[a, b]$ برای هر $p \in [۰, ۱]$ همگراست. □

۸.۳ تخمین خطای تقریب

قضیه ۱۹.۳. خطای تقریب مرتبه n-ام جواب مساله معادله انتگرالی فردهلم به صورت زیر است:

$$
E_n \le B \frac{\big(|\lambda| M(b-a)\big)^n}{۱ - |\lambda| M(b-a)},
$$

که در آن $E_n = \sup\limits_{x \in [a,b]} \big|u(x) - \hat{u}_n(x)\big|$، M و B مقادیر ثابت در قضیه قبلی می‌باشند.

اثبات. برای هر $x \in [a, b]$، تابع خطای v_j را استفاده می‌کنیم.

$$
\big|u(x) - \hat{u}_n(x)\big| = \left|\sum_{j=۰}^{\infty} v_j(x) - \sum_{j=۰}^{n} v_j(x)\right| = \left|\sum_{j=n+۱}^{\infty} \big|v_j(x)\big|\right|
$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \left|v_j(x)\right| \leq B \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda|^{j-1} M^{j-1}(b-a)^{j-1}$$
$$= B\frac{\left(|\lambda|M(b-a)\right)^n}{1-|\lambda|M(b-a)}.$$

□

مثال ۲۰.۳. برای معادله انتگرال فردهلم زیر قضایای بالا را استفاده کنیم.

$$u(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{(x-t)/2}u(t)dt = x$$

حل. با توجه به مسأله $f(x) = x$ و $k(x,t) = e^{\frac{(x-t)}{2}}$ هستند و این توابع در فاصله $[0,1]$ و $[0,1] \times [0,1]$ به ترتیب پیوسته هستند و

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}, M = \max_{x,t\in[0,1]} \left|k(x,t)\right| = \max_{t,x\in[0,1]} \left|e^{\frac{x-t}{2}}\right| = \sqrt{e}$$

بنابراین

$$\frac{1}{2} = |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} = e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0{,}609$$

این یعنی، می‌توان روش هموتوپی را با

$$u\cdot(x) = f(x) = x$$

استفاده کرد و لذا

$$v_0(x) = u_0(x) = x,$$

$$v_1(x) = \left(2\sqrt{e} - 3\right) e^{\frac{x-1}{2}},$$

$$v_2(x) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{e} - 3\right) e^{\frac{x-1}{2}},$$

$$v_۳(x) = \frac{۱}{۴}\left(۲\sqrt{e} - ۳\right) e^{\frac{x-۱}{۲}},$$

$$\vdots$$

$$v_j(x) = \frac{۱}{۲^{j-۱}}\left(۲\sqrt{e} - ۳\right) e^{\frac{x-۱}{۲}}$$

پس جواب معادله به صورت زیر است:

$$u(x) = \sum_{j=۰}^{\infty} v_j(x) = x + \sum_{j=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲^{j-۱}}(۲\sqrt{e} - ۳)e^{\frac{x-۱}{۲}}\right)$$

$$= x + \left(e\sqrt{e} - ۳\right)e^{\frac{x-۱}{۲}} \sum \frac{۱}{۲^{j-۱}} = x - (۴\sqrt{e} - ۶)e^{\frac{x-۱}{۲}}$$

حال با فرض $u_۰(x) = x^۲$ داریم:

$$v_۰(x) = u_۰(x) = x^۲,$$

$$v_۱(x) = \left(۸\sqrt{e} - ۱۳\right) e^{\frac{x-۱}{۲}} + x - x^۲,$$

$$v_۲(x) = \frac{۱}{۲}\left(۷ - ۴\sqrt{e}\right) e^{\frac{x-۱}{۲}},$$

$$v_۳(x) = \frac{۱}{۴}\left(۷ - \sqrt{e}\right) e^{\frac{x-۱}{۲}},$$

$$\vdots$$

$$v_j(x) = \frac{۱}{۲^{j-۱}}\left(۷ - ۴\sqrt{e}\right) e^{\frac{x-۱}{۲}}$$

بنابراین:

$$u(x) = \sum_{j=۰}^{\infty} v_j(x) = x^۲ + (۸\sqrt{e} - ۱۳)e^{\frac{x-۱}{۲}} + x - x^۲ + \sum_{j=۲}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲^{j-۱}}(۷ - ۴\sqrt{e})e^{\frac{x-۱}{۲}}\right)$$

$$= x + (۸\sqrt{e} - ۱۳)e^{\frac{x-۱}{۲}} + (۷ - ۴\sqrt{e})e^{\frac{x-۱}{۲}} \sum \frac{۱}{۲^{j-۱}} = x + (۴\sqrt{e} - ۶)e^{\frac{x-۱}{۲}}.$$

۹.۳ همگرایی و خطای معادلات انتگرالی ولترا

معادله انتگرالی ولترای زیر را در نظر بگیرید.

$$u(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt = f(x) \tag{۱۳۳.۳}$$

که در آن $x \in [a,b]$ و k و f و u توابع در معادلات انتگرالی فردهلم بالا باشند. با استفاده از روش هموتوپی داریم:

$$L(v) = v, \quad N(v) = -\lambda \int_a^b k(a,t)v(t)dt \tag{۱۳۴.۳}$$

با استفاده تعاریف هموتوپی:

$$H(v,p) = v(x) - u_\circ(x) + p\big(u_\circ(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)V(t)dt - f(x)\big). \tag{۱۳۵.۳}$$

مطابق با این روش، معادله $H(v,p) = \circ$ را حل می‌کنیم. بنابراین سری توانی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$v(x) = \sum_{j=\circ}^{\infty} p^j v_j(x). \tag{۱۳۶.۳}$$

و از آن:

$$\sum_{j=\circ}^{\infty} p^j v_j(x) = u_\circ(x) + p\big(f(x) - u_\circ(x)\big) + \sum_{j=۱}^{\infty} p^j \lambda \int_a^x k(x,t)v_{j-۱}(t)dt \tag{۱۳۷.۳}$$

با مقایسه بسط جملات سری توانی از پارامتر p داریم:

$$\begin{aligned} v_0(x) &= u_0(x) \\ v_1(x) &= f(x) - u_0(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) v_0(t)\,dt \\ &\vdots \\ v_j(x) &= \lambda \int_a^x k(x,t) v_{j-1}(t)\,dt, \quad j \geq 2 \end{aligned} \tag{۱۳۸.۳}$$

قضیه ۲۱.۳. فرض کنید $k(x,t)$ و $f(x)$ توابع معادله (۱۳۳.۳) باشند. و این توابع در ناحیه $\Omega_1 = [a,b] \times [a,b]$ و $\Omega = [a,b]$ به ترتیب پیوسته باشند. و توابع f و k کراندار باشند. یعنی اعداد مثبت M و N_1 موجود باشند به طوری که

$$\left|k(x,t)\right| \leq M, \quad \left|f(x)\right| \leq N_1, \quad \forall x,t \in [a,b]$$

آنگاه اگر تقریب اولیه u_0 پیوسته باشد آنگاه سری (۱۳۶.۳) برای هر $p \in [0,1]$ در $[a,b]$ همگراست.

اثبات. $u_0 \in c[a,b]$ را در نظر بگیرید. لذا N_0ی موجود است به طوری که

$$\left|u_0(x)\right| \leq N_0, \quad \forall x \in [a,b]$$

و از آن،

$$\begin{aligned} \left|v_0(x)\right| &= \left|u_0(x)\right| \leq N_0, \\ \left|v_1(x)\right| &= \left|f(x) - u_0(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) v_0(t)\,dt\right| \\ &\leq \left|f(x)\right| + \left|u_0(x)\right| + |\lambda| \int_a^x \left|k(x,t)\right|\left|v_0(t)\right| dt \\ &\leq M_0 + N_1 + |\lambda| N_0 M (x-a) \leq M_0 + N_1 + |\lambda| N_0 M (b-a) = B, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\left|v_j(x)\right| \leq B|\lambda|^{j-1}M^{j-1}\frac{(x-a)^{j-1}}{(j-1)!}, \quad x\in[a,b]$$

در نتیجه برای هر $p\in[0,1]$، داریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_j(x) \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|v_j(x)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty}a_j = N_0 + B\exp\left(|\lambda|M(b-a)\right),$$

که در آن $a_0 = N_0$ و برای هر $j\geq 1$

$$a_j = B|\lambda|^{j-1}M^{j-1}\frac{(b-a)^{j-1}}{(j-1)!}.$$

و این یعنی سری (۱۳۶.۳) به طور یکنواخت همگراست. □

قضیه ۲۲.۳. خطای مرتبه n-ام تقریب جواب $\hat{u}_n(x) = \sum_{j=0}^{n} v_j(x)$ عدد $E_n = \sup_{x\in[a,b]}\left|u(x)-\hat{u}_n(x)\right|$ را می‌توان به صورت زیر تخمین زد:

$$\begin{aligned} E_n &\leq B\left(e^{|\lambda|M(b-a)} - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(|\lambda|M(b-a)\right)^j}{j!}\right)\\ &\leq B\frac{\left(|\lambda|M(b-a)\right)^n}{(n+1)!}\Big(n+\exp\left(|\lambda|M(b-a)\right)\Big), \end{aligned} \tag{۱۳۹.۳}$$

که در آن M و B مشابه قضیه ۲۱.۳ می‌باشد.

اثبات. با استفاده از تخمین توابع v_j برای هر $u\in[a,b]$ داریم:

$$\begin{aligned} \left|u(x)-\hat{u}_n(x)\right| &= \left|\sum_{j=0}^{\infty}v_j(x) - \sum_{j=0}^{n}v_j(x)\right|\\ &= \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}v_j(x)\right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty}\left|v_j(x)\right| \leq B\sum_{j=n+1}^{\infty}|\lambda|^{j-1}M^{j-1}\frac{(b-a)^{j-1}}{(j-1)!}\\ &= B\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(|\lambda|M(b-a)\right)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(|\lambda|M(b-a)\right)^j}{j!}\right) \end{aligned}$$

$$= B\left(e^{|\lambda|M(b-a)} - \sum_{j=0}^{n-1}\right)\left(\frac{|\lambda|M(b-a)^j}{j!}\right)$$

که (۱۳۹.۳) را نتیجه می‌دهد. □

مثال ۲۳.۳. برای معادله

$$\frac{1}{3}x^3 - 2x = u(x) + \int_0^x u(t)dt, \quad x \in [0, 1]$$

قضایای ۲۱.۳ و ۲۲.۳ را استفاده کنید.

اثبات. با فرض $u_0(x) = x^2$ و انجام محاسبات داریم:

$$v_0(x) = u_0(x) = x^2, \quad v_1(x) = -2x - x^2,$$
$$v_2(x) = x^2 + \frac{x^3}{3}, \quad v_3(x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{12},$$
$$v_4(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60}, \quad v_5(x) = -\frac{x^5}{60} - \frac{x^6}{360}$$

و برای هر $j \geq 1$،

$$v_j(x) = 2(-1)^j\left(\frac{x^j}{j!} + \frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\right)$$

بنابراین جواب، به صورت زیر است:

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x) = x^2 + 2\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{x^j}{j!} + \frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\right)$$
$$= x^2 + 2\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-x)^j}{j!} - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-x)^{j+1}}{(j+1)!}\right)$$
$$= x^2 + 2\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-x)^j}{j!} - \sum_{j=2}^{\infty}\frac{(-x)^{j+1}}{(j+1)!}\right)$$

$$= x^{۲} + ۲\big(e^{-x} - ۱ - (e^{-x} - ۱ - x)\big) = x^{۲} + ۲x$$

□

فصل ۴

معادلات انتگرو ـ دیفرانسیل ولترا ـ فردهلم غیرخطی

۱.۴ معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل

۲.۴ مقدمه

در این فصل معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل که در آن هر دو عملگر انتگرال و دیفرانسیل در معادله ظاهر می‌شوند، را مطالعه می‌کنیم. این نوع معادلات ابتدا در اوائل سال ۱۹۰۰ توسط ولترا معرفی شدند [۵، ۶، ۷]. ولترا در حال مطالعه پدیده رشد جمعیت و بخصوص تأثیر وراثت بود که در تحقیق خود با این گونه معادلات مواجه شد و نام مذکور را برای آنها انتخاب کرد.

دانشمندان و محققین در پژوهش خود درکاربرد علوم در مواردی نظیر انتقال گرما، پدیده انتشار، پخش نوترون و غیره به حل این معادلات نیاز پیدا کردند.

جزئیات بیشتر درباره مواردی را که این گونه معادلات ظاهر می‌شوند می‌توان در کاربردهای فیزیک و زیست‌شناسی و مهندسی و کتب معادلات انتگرال [۱۱، ۱۴، ۱۵، ۱۷] پیدا کرد.

به این نکته مهم باید توجه کرد که در معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل تابع مجهول $u(x)$ و حداقل یکی از مشتق‌هایش نظیر $u'(x)$ یا $u''(x)$ و یا $\cdots$ در خارج و همچنین زیرعلامت انتگرال قرار دارند. یکی از جاهائی که معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل ظاهر می‌شوند و می‌توان آنها را به سادگی دید در تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال با استفاده از قاعده لیپ نیتز است. در این حالت معادله انتگرال ـ دیفرانسیل را می‌توان به عنوان یک مرحله میانی در تعیین یک معادله انتگرال ولترا معادل با معادله دیفرانسیل داده شده، همانطوری که در بخش ۱۱.۱ بحث شد، تلقی کرد.

در زیر چند مثال از معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل آورده شده است.

$$u'(x) = x - \int_{0}^{1} e^{x-t}u(t)dt, \quad u(0) = 0, \tag{۱.۴}$$

$$u''(x) = e^{x} - x + \int_{0}^{t} utu'(t)dt, \quad u(0) = 0, u'(0) = 1, \tag{۲.۴}$$

$$u'(x) = x - \int_{0}^{x} (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0, \tag{۳.۴}$$

$$u''(x) = -x + \int_{0}^{x} (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0, u'(0) = -1. \tag{۴.۴}$$

از مثالهای بالا واضح است که تابع مجهول $u(x)$ یا یکی از مشتق‌هایش در زیر علامت انتگرال، و همچنین دیگر مشتق‌های $u(x)$ در خارج از علامت انتگرال ظاهر می‌شوند. لذا در معادلات بالا عملگر مشتق و انتگرال با هم در یک معادله حضور دارند. در نتیجه عبارت انتگرال ـ دیفرانسیل برای این گونه معادلات به کار برده می‌شود که نشان دهنده ترکیب هر دو مفهوم در آن معادلات است.

با توجه به حدود انتگرال‌گیری معادلات (۴) − (۱) و طبقه‌بندی معادلات انتگرال که در فصل ۱ معرفی شد، معادلات (۱) و (۲) را معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل فردهلم و معدلات (۳) و (۴) را معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل ولترا می‌نامیم. به علاوه خوب است که بدانیم معادلات (۴) − (۱) معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل خطی نام دارند و این بدان دلیل است که تابع مجهول یعنی $u(x)$ و مشتق‌های آن در معادله مذکور به طور خطی حضور پیدا کرده‌اند. البته معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل غیرخطی هم در خیلی از مسائل علوم و مهندسی به کار برده می‌شوند. توجه ما در این فصل روی معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل خطی متمرکز است و چند روش را جهت حل این گونه معادلات ارائه می‌کنیم.

برای تعیین جواب یک معادله انتگرال ـ دیفرانسیل باید شرایط اولیه مشخص شده باشند و همان‌طوری که به طور وضوح دیده می‌شود این نیاز به علت حضور $u(x)$ و مشتق‌هایش در معادله

است. شرایط اولیه جهت تعیین ثابت‌های انتگرال‌گیری مورد نیاز هستند.

در ادامه چنین روشی برای حل معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل خطی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۳.۴ معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل فردهلم

در این بخش روشهای قابل اعتمادی برای حل معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل فردهلم مطالعه می‌کنیم. البته باید توجه کرد که بیشتر روی معادلاتی که در آنها هسته یعنی $K(x,t)$ جدایی‌پذیر بوده یعنی بتوان هسته آن را به صورت یک حاصل جمع متناهی به شکل زیر نشان داد، تمرکز می‌کنیم.

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) h_k(t).$$

بدون اینکه از کلیت مطلب کاسته شود، بحث خود را روی هسته با یک جمله یعنی به شکل زیر محدود می‌کنیم و نتایج این حالت را می‌توان به حالت‌های دیگر تعمیم داد.

$$K(x,t) = g(x) h(t), \tag{۵.۴}$$

هسته غیرجدایی‌پذیر را می‌توان بوسیله بسط تیلور به یک هسته جدائی‌پذیر تقلیل داد. یادآور شویم که جدیدترین و علمی‌ترین تکنیک‌هائی را که برای حل این‌گونه مسائل به کار می‌رود، معرفی می‌کنیم و برای معادله مورد بحث یا یک جواب واقعی به‌دست می‌آوریم یا یک جواب تقریبی با بالاترین دقت ممکن را پیدا می‌کنیم. لازم به ذکر است که روش‌هائی را که بحث می‌کنیم، قبلاً هم معرفی شده‌اند لیکن بحث ما بیشتر حول این متمرکز خواهد بود که چگونه این روشها را برای حل این‌گونه معادلات به کار می‌بریم. این مطلب را با علمی‌ترین روش از این نوع روشها آغاز می‌کنیم.

۱.۳.۴ روش تجزیه مستقیم

بدون اینکه از کلیت مطلب کاسته شود، فرم استاندارد زیر را برای معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل فردهلم فرض می‌کنیم

$$u^{(n)}(x)=f(x)+\int_{0}^{1}K(x,t)u(t)dt,\quad u^{(k)}(0)=b_k, 0\leq k\leq (n-1). \tag{۶.۴}$$

البته $u^{n}(x)$ مشتق nام تابع $u(x)$ نسبت به x را نشان می‌دهد و b_kها ثابت‌هائی هستند که شرایط اولیه را مشخص می‌کنند.

با جایگذاری عبارت (۵.۴) در معادله (۶.۴) بدست می‌آوریم:

$$u^{(n)}(x)=f(x)+g(x)\int_{0}^{1}h(t)u(t)dt,\quad u^{(k)}(0)=b_k,\quad 0\leq k\leq (n-1). \tag{۷.۴}$$

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که انتگرال معین در معادله انتگرال ـ دیفرانسیل (۷.۴) شامل یک انتگرال است که کاملاً به متغیر t وابسته است. لذا انتگرال معین در طرف راست معادله (۷.۴) را با یک عدد ثابت مثل α نشان می‌دهیم. لذا قرار می‌دهیم:

$$\alpha=\int_{0}^{1}h(t)u(t)dt. \tag{۸.۴}$$

با توجه به تعریف α در رابطه (۸.۴)، معادله (۷.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u^{(n)}(x)=f(x)+\alpha g(x) \tag{۹.۴}$$

برای محاسبه جواب واقعی یعنی $u(x)$ باید α را تعیین کنیم. برای محاسبه α با استفاده از رابطه (۹.۴) و با قرار دادن آن در معادله (۸.۴) عبارتی برای $u(x)$ بدست می‌آوریم. برای رسیدن به این عبارت از دو طرف (۹.۴) به تعداد n بار از صفر تا x انتگرال می‌گیریم و از شرایط اولیه داده شده

$b_k = u^{(k)}(\circ)(\circ \leq k \leq n-\text{۱})$ هم استفاده می‌کنیم. لذا عبارت زیر برای $u(x)$ بدست می‌آید که در آن $P(x;\alpha)$ نتیجه حاصل از انتگرال‌گیری از عبارت (۹.۴) و استفاده از شرایط اولیه داده شده است.

$$u(x) = p(x;\alpha), \tag{۱۰.۴}$$

با قرار دادن عبارت (۱۰.۴) در طرف راست معادله (۸.۴) و انتگرال‌گیری و حل معادله حاصل، مقدار α تعیین می‌شود. سپس جواب واقعی معادله (۶.۴) با قرار دادن مقدار α در رابطه (۱۰.۴) بدست می‌آید.

مثال ۱.۴. معادله انتگرال ـ دیفرانسیل فردهلم زیر را با استفاده از روش محاسبه مستقیم حل کنید.

$$u'(x) = \text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۳}}x + x\int_\circ^\text{۱} tu(t)dt, \qquad u(\circ) = \circ, \tag{۱۱.۴}$$

حل. معادله (۱۱.۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$u'(x) = \text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۳}}x + \alpha x, \qquad u(\circ) = \circ, \tag{۱۲.۴}$$

البته α بوسیله رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\alpha = \int_\circ^\text{۱} tu(t)dt. \tag{۱۳.۴}$$

برای تعیین α ابتدا نیاز به یک عبارت برای $u(x)$ جهت استفاده از رابطه (۱۳.۴) داریم. این کار به سادگی با انتگرال‌گیری از طرفین معادله (۱۲.۴) در فاصله ۰ تا x و استفاده از شرایط اولیه داده شده، به صورت زیر انجام می‌شود.

$$u(x) = x + \left(\frac{\alpha}{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{۶}}\right)x^\text{۲}. \tag{۱۴.۴}$$

با قرار دادن عبارت (۱۴.۴) در رابطه (۱۳.۴) مقدار α بدست می‌آید.

$$\alpha = \frac{1}{3}, \tag{۱۵.۴}$$

لذا با توجه به معادله (۱۴.۴) و مقدار فوق جواب واقعی معادله انتگرال دیفرانسیل (۱۱.۴) مشخص می‌شود.

$$u(x) = x. \tag{۱۶.۴}$$

۲.۳.۴ روش تجزیه ادومیان

این روش به ساده‌ترین شکل در فصل ۲ به طور مختصر برای حل معادلات انتگرال فردهلم معرفی شد. در این بخش خواهیم دید که چگونه این روش برای تعیین جواب سری برای معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل فردهلم اعمال می‌شود. همانطوریکه قبلاً گفته شد برای یک معادله انتگرال ـ دیفرانسیل فردهلم می‌توان شکل استاندارد زیر را فرض کرد.

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt, \qquad u^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \le k \le (n-1) \tag{۱۷.۴}$$

البته $u^{(n)}(x)$ نشان دهنده مشتق مرتبه nام $u(x)$ نسبت به x هستند و b_kها ثابت‌هایی هستند که شرایط اولیه را مشخص می‌کنند. با جایگذاری عبارت (۵.۴) در معادله (۱۷.۴) بدست می‌آوریم:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x)\int_0^1 h(t)u(t)dt. \tag{۱۸.۴}$$

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که انتگرال معین در معادله انتگرال ـ دیفرانسیل (۱۷.۴) شامل یک انتگرالده است که کاملاً به متغیر t وابسته است. با استفاده از مفهوم عملگرها می‌توان معادله (۱۸.۴) را به صورت زیر نوشت:

$$Lu(x) = f(x) + g(x)\int_0^1 h(t)u(t)dt. \tag{۱۹.۴}$$

البته عملگر دیفرانسیل L به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$L = \frac{d^n}{dx^n}. \tag{۲۰.۴}$$

واضح است که L یک عملگر معکوس‌پذیر است، لذا عملگر انتگرال L^{-1} یک عملگر انتگرال‌گیری n گانه است و فاصله هر یک از انتگرال‌های معین را می‌توان از صفر تا x در نظر گرفت.
با اعمال L^{-1} روی دو طرف رابطه (۱۹.۴) نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} u(x) &= b_0 + b_1 x + \frac{1}{2!} b_2 x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} b_{n-1} x^{n-1} + L^{-1}\big(f(x)\big) \\ &\quad + \left(\int_0^1 h(t) u(t) dt \right) L^{-1}\big(q(x)\big). \end{aligned} \tag{۲۱.۴}$$

به عبارت دیگر از رابطه (۱۹.۴) به تعداد n دفعه در فاصله ۰ تا x انتگرال می‌گیریم و شرایط اولیه را در هر گام انتگرالگیری به کار می‌گیریم. خوب است به این نکته توجه کنیم که معادله حاصل یعنی معادله (۲۱.۴) یک معادله انتگرال فردهلم استاندارد است. در بخش بعدی از این نماد استفاده خواهیم کرد.
در روش تجزیه معمولاً جواب معادله (۱۷.۴) یعنی $u(x)$ به شکل سری به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x). \tag{۲۲.۴}$$

با جایگذاری عبارت (۲۲.۴) در دو طرف معادله (۲۱.۴) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_x x^k + L^{-1}\big(f(x)\big) \\ &\quad + \left(\int_0^1 h(t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt \right) L^{-1}\big(g(x)\big). \end{aligned} \tag{۲۳.۴}$$

و این معادل است با:

$$\begin{aligned} u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots = &\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k + L^{-1}\big(f(x)\big)\\ &+\left(\int_0^1 h(t)u_0(t)dt\right)L^{-1}\big(g(x)\big)\\ &+\left(\int_0^1 h(t)u_1(t)dt\right)L^{-1}\big(g(x)\big)\\ &+\left(\int_0^1 h(t)u_2(t)dt\right)L^{-1}\big(g(x)\big)\\ &+\cdots \end{aligned} \tag{۲۴.۴}$$

مولفه‌های $u_0(x)$، $u_1(x)$، $u_2(x)$، $u_3(x)$، $\cdots$ از تابع مجهول $u(x)$ را می‌توان به صورت تراجعی همانگونه که قبلاً گفته شد به شکل زیر پیدا کرد:

$$u_0(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k + L^{-1}\big(f(x)\big), \tag{۲۵.۴}$$

$$u_1(x)=\left(\int_0^1 h(t)u_0(t)dt\right)L^{-1}\big(g(x)\big), \tag{۲۶.۴}$$

$$u_2(x)=\left(\int_0^1 h(t)u_1(t)dt\right)L^{-1}\big(g(x)\big), \tag{۲۷.۴}$$

$$u_3(x)=\left(\int_0^1 h(t)u_2(t)dt\right)L^{-1}\big(g(x)\big), \tag{۲۸.۴}$$

و الی آخر.

طرح مورد بحث در بالا جهت تعیین مولفه‌های $u_0(x)$، $u_1(x)$، $u_2(x)$، $u_3(x)$، ... از جواب معادله (۱۷.۴) یعنی $u(x)$ را می‌توان به کمک روابط تراجعی زیر نشان داد.

$$u_0(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k + L^{-1}\big(L(x)\big), \tag{۲۹.۴}$$

$$u_{n+1}(x)=\left(\int_0^1 h(t)u_n(t)dt\right)L^{-1}\big(g(x)\big), \qquad n\geq 0. \tag{۳۰.۴}$$

با توجه به روابط (۲۹.۴) و (۳۰.۴) مولفه‌های $u_0(x)$، $u_1(x)$، $u_2(x)$، $u_3(x)$ و ... از جواب $u(x)$ فوراً تعیین می‌شوند. با محاسبه این مولفه‌ها جواب معادله (۱۷.۴) یعنی $u(x)$ به سادگی با استفاده از رابطه (۲۲.۴) به شکل سری بدست می‌آید. البته سری بدست آمده برای $u(x)$ اغلب جواب واقعی را همانطوریکه بعداً خواهیم دید، بدست می‌آوریم. برای مسائلی که پیدا کردن جواب بسته به فرم ساده نیست، جواب به شکل سری را جهت تعیین جواب تقریبی به کار می‌بریم. می‌توان نشان داد که معمولاً تعداد کمی از جملات سری حاصل از روش تجزیه، تقریبی با دقت بالا را نتیجه می‌دهد.

روش تجزیه ضمن اجتناب از حجم زیاد محاسبات، پاره‌ای دیگر از مشکلات بقیه روشها را هم ندارد. حجم زیاد محاسبات را گاهی می‌توان با مشاهده پدیده خود حذف کننده مشهور به آشوب می‌نیمم کرد.

مثال ۲.۴. معادله انتگرال ـ دیفرانسیل فردهلم زیر را با استفاده از روش تجزیه حل کنید.

$$u'(x) = \cos x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} xtu(t)dt, \qquad u(0) = 0, \tag{۳۱.۴}$$

حل. با انتگرال‌گیری از طرفین معادله (۳۱.۴) در فاصله 0 تا x نتیجه زیر را بدست می‌آوریم.

$$u(x) - u(0) = \sin x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^2\int_0^{\pi/2} tu(t)dt, \qquad u(t) = 0, \tag{۳۲.۴}$$

که با به کار بردن شرط اولیه داده شده خواهیم داشت:

$$u(x) = \sin x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^2\int_0^{\pi/2} tu(t)dt, \tag{۳۳.۴}$$

با استفاده از تکنیک تجزیه جواب را به شکل سری زیر نمایش می‌دهیم:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x). \tag{۳۴.۴}$$

با قرار دادن عبارت (۳۴.۴) در دو طرف معادله (۳۳.۴) بدست می‌آوریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sin x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^2 \int_0^{\pi/2} t \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right) dt, \qquad (۳۵.۴)$$

اما این معادل است با:

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots = \sin x &+ \frac{1}{8}x^2 \\ &- \frac{1}{8}x^2 \left(\int_0^{\pi/2} t u_0(t) dt\right) \\ &- \frac{1}{8}x^2 \left(\int_0^{\pi/2} t u_1(t) dt\right) \\ &- \frac{1}{8}x^2 \left(\int_0^{\pi/2} t u_2(t) dt\right) \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

لذا قرار می‌دهیم:

$$u_0(x) = \sin x + \frac{1}{8}x^2, \qquad (۳۶.۴)$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\frac{1}{8}x^2 \int_0^{\pi/2} t \left(\sin t + \frac{1}{8}t^2\right) dt, \\ &= -\frac{1}{8}x^2 - \frac{\pi^4}{16^3}x^2. \end{aligned} \qquad (۳۷.۴)$$

با در نظر گرفتن مولفه‌های $u_0(x)$ و $u_1(x)$ مشاهده می‌کنیم که جمله $\frac{1}{8}x^3$ در هر دو مولفه لیکن با علامت‌های مختلف وجود دارد. با حذف جملات قرینه و قرار دادن جملات باقیمانده در $u_0(x)$ جواب زیر بدست می‌آید. می‌توان دید که این تابع در معادله داده شده صدق می‌کند.

$$u(x) = \sin x. \qquad (۳۸.۴)$$

لذا جواب واقعی به فرم بسته حاصل شده است.

۴.۴ تبدیل به معادلات انتگرال فردهلم

در این بخش یک تکنیک را که یک معادله انتگرال ـ دیفرانسیل فردهلم را به یک معادله انتگرال فردهلم معادل آن تبدیل می‌کند، معرفی می‌کنیم. این کار را به سادگی می‌توان با انتگرال‌گیری در فاصله ۰ تا x از دو طرف معادله انتگرال ـ دیفرانسیل داده شده به تعداد دفعاتی برابر با مرتبه مشتق موجود در معادله و با استفاده از شرایط اولیه انجام داد.

به این نکته مهم باید توجه کرد که این تکنیک تنها زمانی قابل استفاده است که تابع مجهول در معادله انتگرال ـ دیفرانسیل فردهلم به صورت $u(x)$ باشد و زیرعلامت انتگرال هیچ مشتقی از این تابع حضور نداشته باشد.

پس از تبدیل معادله داده شده به یک معادله انتگرال فردهلم استاندارد، هر کدام از روشهائی را که در فصل دوم مطالعه شد، نظیر روش تجزیه، روش محاسبه مستقیم، روش تقریبهای متوالی یا روش جایگذاری‌های متوالی را برای حل معادله حاصل می‌توان به کار برد.

برای درک بهتر این روش چند مثال ارائه می‌شود.

مثال ۳.۴. معادله انتگرال ـ دیفرانسیل فردهلم زیر را با تبدیل به یک معادله انتگرال فردهلم استاندارد حل کنید.

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + x\int_0^1 tu(t)dt, \qquad u(0) = 0, \tag{۳۹.۴}$$

حل. با انتگرال‌گیری از دو طرف این معادله در فاصله ۰ تا x و استفاده از شرط اولیه بدست می‌آوریم:

$$u(x) = x - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{2!}x^2\left(\int_0^1 tu(t)dt\right). \tag{۴۰.۴}$$

به سادگی می‌توان دید که معادله (۳۹.۴) یک معادله انتگرال فردهلم است، لذا هرکدام از روشهایی را که قبلاً معرفی شد، می‌توانیم برای حل آن به کار ببریم. روش تقریبهای متوالی را انتخاب می‌کنیم. لذا یک تقریب اولیه به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$u_0(x) = x. \tag{۴۱.۴}$$

با استفاده از این انتخاب در معادله (۴۰.۴) اولین تقریب را بدست می‌آوریم.

$$u_1(x) = x - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{2!}x^2\left(\int_0^1 t^2 dt\right). \tag{۴۲.۴}$$

لذا داریم:

$$u_1(x) = x. \tag{۴۳.۴}$$

واضح است که اگر به همین نحو ادامه دهیم آنگاه بدست می‌آوریم:

$$u_n(x) = x. \tag{۴۴.۴}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n\to\infty} u_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} x \\ &= x. \end{aligned} \tag{۴۵.۴}$$

۵.۴ معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل ولترا

در این بخش، روشهای قابل اعتمادی را برای حل معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل ولترا به کار می‌بریم. ما در مطالعه خود بیشتر روی هسته‌های جدایی‌پذیر به شکل زیر تمرکز می‌کنیم.

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t). \tag{۴۶.۴}$$

بدون اینکه از کلیت مطلب کاسته شود، فرض می‌کنیم که هسته یعنی $K(x,t)$ برابر با حاصلضرب توابع $g(x)$ و $f(x)$ باشد. لذا

$$K(x,t) = g(x)h(t), \tag{۴۷.۴}$$

البته نتیجه بحث را می‌توان برای بعضی حالت‌های دیگر هم به طور مشابه تعمیم داد. هسته‌های غیرجدایی‌پذیر را هم می‌توان با استفاده از بسط تیلور به هسته‌های جدایی‌پذیر تقلیل داد. روش‌هایی که ارائه می‌شوند، با کمی استثناء شبیه روش‌هایی هستند که در فصل‌های قبلی برای حل این گونه معادلات معرفی شدند. بحث اصلی و ایده اساسی کار ما بر آن استوار است که چگونه روش‌هایی را که در فصل‌های قبلی مورد مطالعه قرار گرفتند تعمیم دهیم. به همین دلیل ابتدا با عملی‌ترین روش، این بحث را شروع می‌کنیم.

۱.۵.۴ روش جواب سری

این روش در فصل‌های قبلی فصل ۳ معرفی شد. بدون اینکه از کلیت مطلب کاسته شود، یک شکل استاندارد برای معادله انتگرال ـ دیفرانسیل ولترا به صورت زیر فرض می‌کنیم که در آن $u^{(n)}(x)$،

مشتق مرتبه nام تابع $u(x)$ نسبت به x را نشان می‌دهد.

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_{۰}^{x} K(x,t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(۰) = b_k, ۰ \leq k \leq (n-۱), \tag{۴۸.۴}$$

در ضمن b_kها ثابت‌هایی هستند که شرایط اولیه را معرفی می‌کنند. با جایگذاری عبارت (۴۷.۴) در معادله (۴۸.۴) خواهیم داشت:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x)\int_{۰}^{x} h(t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(۰) = b_k, ۰ \leq k \leq (n-۱) \tag{۴۹.۴}$$

با ایده‌ای شبیه آنچه در روش جواب سری که معمولاً برای حل معادلات دیفرانسیل عادی حول یک نقطه معمولی استفاده می‌شود، کار خود را آغاز می‌کنیم. برای رسیدن به این هدف ابتدا فرض می‌کنیم که جواب $u(x)$ یک تابع تحلیلی است. لذا می‌توان آن را به صورت یک سری به شکل زیر، که در آن ضرایب ثابت a_kها تعیین خواهند شد، نوشت.

$$u(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} a_k x^k, \tag{۵۰.۴}$$

باید توجه کرد که چند جمله اول a_k را می‌توان با استفاده از شرایط اولیه تعیین کرد.

$$a_۰ = u(۰), \tag{۵۱.۴}$$

$$a_۱ = u'(۰), \tag{۵۲.۴}$$

$$a_۲ = \frac{۱}{۲!}u''(۰), \tag{۵۳.۴}$$

و در مورد بقیه ضرایب با توجه به تعداد شرایط اولیه و همچنین با استفاده از تکنیکی که بعداً بحث خواهد شد، اقدام خواهیم کرد.

با جایگذاری عبارت (۵۰.۴) در دو طرف معادله (۴۹.۴) داریم:

$$\left(\sum_{k=۰}^{\infty} a_k x^k\right)^{(n)} = f(x) + g(x)\int_{۰}^{x} h(t)\left(\sum_{k=۰}^{\infty} a_k t^k\right)dt. \tag{۵۴.۴}$$

با نگاه به رابطه (۵۴.۴) در می‌یابیم که معادله (۴۹.۴) به یک معادله‌ای تقلیل پیدا کرده است که اتگرال‌های مربوطه به راحتی قابل محاسبه هستند؛ بخصوص که در طرف راست رابطه (۵۴.۴) تنها به محاسبه انتگرالهایی به شکل $t^n(n \geq ۰)$، نیاز داریم.

قدم بعدی نوشتن بسط تیلور برای $f(x)$ و محاسبه انتگرال‌های حاصل در معادله (۵۴.۴) و سپس برابر قرار دادن ضرائب توانهای مساوی x در دو طرف آن معادله است.

در نتیجه با قرار دادن ضرائب حاصل $a_k(۰ \geq k)$ در رابطه (۵۰.۴) جواب معادله به شکل سری بدست می‌آید. البته اگر سری حاصل بسط تیلور یک تابع مقدماتی مشهور باشد، آنگاه می‌توان جواب را به صورت یک فرم بسته بدست آورد. در صورتیکه این تابع قابل حصول نباشد همان جواب به شکل سری را به کار می‌بریم. برای ارائه یک تصویر واضح‌تری از تکنیک مذکور و اینکه چگونه برای حل معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل ولترا آن را اعمال می‌کنیم، در زیر چند مثال را با روش جواب سری حل می‌کنیم.

مثال ۴.۴. معادله انتگرال ـ دیفرانسیل ولترا زیر را با به کار بردن روش جواب سری حل کنید.

$$u''(x) = x\cosh x - \int_۰^x tu(t)dt, \quad u(۰) = ۰, u'(۰) = ۱. \tag{۵۵.۴}$$

حل. به جای $u(x)$ سری

$$u(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n, \tag{۵۶.۴}$$

را در دو طرف معادله (۵۵.۴) قرار می‌دهیم.

اکنون با استفاده از بسط تیلور تابع $\cosh x$ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)a_n x^{n-۲} = x\left(\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{x^{۲k}}{(۲k)!}\right) - \int_۰^x t\left(\sum_{n=۰}^{\infty} a_n t^n\right)dt. \tag{۵۷.۴}$$

با استفاده از شرایط اولیه:

$$a_0 = 0, \tag{۵۸.۴}$$

$$a_1 = 1. \tag{۵۹.۴}$$

و با محاسبه انتگرال‌های جملات به شکل $t^n (n \geq 0)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots = x\left(1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^2 + \cdots\right) \\ - \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}a_2x^3 + \cdots\right). \end{aligned} \tag{۶۰.۴}$$

از تساوی ضرایب توانهای یکسان x در دو طرف بدست می‌آوریم:

$$a_2 = 0, \tag{۶۱.۴}$$

$$a_3 = \frac{1}{3!}, \tag{۶۲.۴}$$

$$a_4 = 0, \tag{۶۳.۴}$$

و به طور کلی می‌توان نوشت:

$$a_{2n} = 0, \ \text{به ازای} \ n \geq 0, \tag{۶۴.۴}$$

$$a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}, \ \text{به ازای} \ n \geq 0. \tag{۶۵.۴}$$

با به کار بردن عبارت (۵۶.۴) جواب $u(x)$ را به شکل سری زیر بدست می‌آوریم:

$$u(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \tag{۶۶.۴}$$

لذا جواب واقعی معادله (۵۵.۴) به فرم بسته به صورت زیر خواهد بود.

$$u(x) = \sinh x. \tag{۶۷.۴}$$

۲.۵.۴ روش تجزیه

در این بخش خواهیم دید که چگونه این روش را می‌توان جهت تعیین یک جواب سری برای معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل ولترا اعمال کرد. همانطوریکه بعداً خواهیم دید، این روش کارا و قابل اعتماد است.

بدون اینکه از کلیت مطلب کاسته شود، یک شکل استاندارد برای معادله انتگرال ـ دیفرانسیل ولترا را به صورت زیر فرض می‌کنیم.

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_۰^x K(x,t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(۰) = b_k, ۰ \leq k \leq (n - ۱۰. \qquad (۶۸.۴)$$

البته $u^{(n)}(x)$ نشان دهنده مشتق مرتبه nام تابع $u(x)$ نسبت به x است و b_kها ثابت‌هایی هستند که توسط شرایط اولیه مشخص می‌شوند. طبیعی است که در جستجوی عبارتی برای $u(x)$ باشیم که از رابطه (۶۸.۴) بدست آید. این کار با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۶۸.۴) در فاصله ۰ تا x به تعداد دفعات برابر با مرتبه مشتق تابع مجهول در معادله مورد نظر انجام می‌شود. در نتیجه بدست می‌آوریم:

$$u(x) = \sum_{k=۰}^{n-۱} \frac{۱}{k!} b_k x^k + L^{-۱}\big(f(x)\big) + L^{-۱}\left(\int_۰^x K(x,t)u(t)dt\right). \qquad (۶۹.۴)$$

البته $\sum\limits_{k=۰}^{n-۱} \frac{۱}{k!} b_k x^k$ با استفاده از شرایط اولیه بدست می‌آید و $L^{-۱}$ یک عملگر انتگرال‌گیری nگانه است.

اکنون روش تجزیه را با نمایش جواب معادله (۶۹.۴) یعنی $u(x)$ به صورت سری زیر به کار می‌بریم.

$$u(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} u_n(x), \qquad (۷۰.۴)$$

با جایگذاری عبارت (۷۰.۴) داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_x x^k + L^{-1}\big(f(x)\big) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right) dt\right) \quad (۷۱.۴)$$

و این برابر است با:

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}\big(f(x)\big) \\ & + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_0(t)dt\right) \\ & + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_1(t)dt\right) \\ & + L-1\left(\int_0^x K(x,t)u_2(t)dt\right) \\ & + \cdots \end{aligned} \quad (۷۲.۴)$$

مولفه‌های $u_0(x)$، $u_1(x)$، $u_2(x)$، $u_3(x)$ و $\cdots$ از تابع مجهول $u(x)$ را می‌توان به صورت تراجعی و شبیه آنچه که قبلاً هم بحث شد، تعیین کرد.

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} a_k x^k + L^{-1}\big(f(x)\big), \quad (۷۳.۴)$$

$$u_1(x) = L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_0(t)dt\right), \quad (۷۴.۴)$$

$$u_2(x) = L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_1(t)dt\right), \quad (۷۵.۴)$$

$$u_3(x) = L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_2(t)dt\right), \quad (۷۶.۴)$$

و به همین نحو تا آخر ...

روش تجزیه مورد بحث در بالا برای تعیین مولفه‌های $u_0(x)$، $u_1(x)$، $u_2(x)$، $u_3(x)$ و $\cdots$ از جواب $u(x)$ معادله (۶۸.۴) را می‌توان به صورت تراجعی به شکل زیر نشان داد.

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} a_k x^k + L^{-1}\big(f(x)\big), \quad (۷۷.۴)$$

$$u_{n+1}(x) = L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_n(t)dt\right), \qquad n \geq 0 \tag{۷۸.۴}$$

با توجه به روابط (۷۷.۴) و (۷۸.۴) مولفه‌های $u_0(x)$، $u_1(x)$، $u_2(x)$، $u_3(x)$ و $\cdots$ فوراً تعیین می‌شوند. پس از تعیین مولفه‌ها، جواب معادله (۶۸.۴) به صورت یک سری با استفاده از عبارت (۷۰.۴) حاصل می‌شود. لذا سری حاصل از عبارت (۷۰.۴) جواب واقعی را همانطوریکه بعداً خواهیم دید، به صورت یک فرم بسته پیدا می‌کند. اما برای مسائلی که در آنها نتوان سری (۷۰.۴) را محاسبه کرد؛ معمولاً یک سری قطع شده به صورت $\sum\limits_{n=0}^{k} u_n(x)$ را به عنوان جواب تقریبی $u(x)$ به کار می‌بریم.

به این نکته اشاره می‌کنیم که پدیده آشوب که قبلاً معرفی شد، اینجا هم چنانچه جملات خود حذف کننده در $u_0(x)$ و $u_1(x)$ ظاهر شوند، ممکن است به کار گرفته شود. مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه می‌توانیم تکنیک تجزیه را به کار ببریم.

مثال ۵.۴. معادله انتگرال ـ دیفرانسیل ولترای زیر را با استفاده از روش تجزیه حل کنید.

$$u''(x) = x + \int_0^x (n-t)u(t)dt, \qquad u(0)=0, u'(0)=1, \tag{۷۹.۴}$$

حل. با اعمال عملگر انتگرال‌گیری دوگانه L^{-1} که

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot)dxdx, \tag{۸۰.۴}$$

روی دو طرف معادله (۷۹.۴) یعنی با انتگرال‌گیری از طرفین معادله (۷۹.۴) در فاصله ۰ تا x دو بار و استفاده از شرایط اولیه داده شده رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$u(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u(t)dt\right). \tag{۸۱.۴}$$

با استفاده از روش تجزیه و روابط (۷۷.۴) و (۷۸.۴) خواهیم داشت:

$$u_{۰}(x) = x + \frac{۱}{۳!}x^{۳}, \tag{۸۲.۴}$$

$$u_{۱}(x) = L^{-۱}\left(\int_{۰}^{x}(x-t)u_{۰}(t)dt\right),$$

$$= \frac{۱}{۵!}x^{۵}\frac{۱}{۷!}x^{۷}, \tag{۸۳.۴}$$

$$u_{۲}(x) = L^{-۱}\left(\int_{۰}^{x}(x-t)u_{۱}(t)dt\right),$$

$$= \frac{۱}{۹!}x^{۹} + \frac{۱}{۱۱!}x^{۱۱}. \tag{۸۴.۴}$$

با ترکیب کردن معادلات (۸۴.۴) - (۸۲.۴) جواب $u(x)$ به صورت یک سری به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$u(x) = x + \frac{۱}{۳!}x^{۳} + \frac{۱}{۵!}x^{۵} + \frac{۱}{۷!}x^{۷} + \frac{۱}{۹!}x^{۹} + \frac{۱}{۱۱!}x^{۱۱} + \cdots, \tag{۸۵.۴}$$

و لذا جواب واقعی به فرم بسته به صورت زیر است.

$$u(x) = \sinh x. \tag{۸۶.۴}$$

۳.۵.۴ تبدیل به معادله انتگرال ولترا

به سادگی می‌توانیم معادله انتگرال ـ دیفرانسیل ولترا را به یک معادله انتگرال ولترای معادل آن تبدیل کنیم، مشروط به آنکه هسته آن معادله، یک هسته تفاضلی یعنی به صورت $K(x,t) = K(x-t)$ باشد. این کار را می‌توان به سادگی با انتگرال‌گیری از دو طرف آن معادله و استفاده از شرایط اولیه انجام داد. برای تبدیل یک معادله انتگرال ولترا منظم، باید فرمول بخش ۴.۱ فصل ۱ را که انتگرال چندگانه را به یک انتگرال یک گانه تبدیل می‌کند به کار ببریم.

معمولاً فرمول‌های زیر که در فصل ۱ آنها را دیدیم، به ترتیب برای تبدیل انتگرال‌های دوگانه و سه‌گانه به یک انتگرال یک گانه به کار برده می‌شوند.

$$\int_{0}^{x}\int_{0}^{x} u(t)dtdt = \int_{0}^{x}(x-t)u(t)dt, \tag{۸۷.۴}$$

و

$$\int_{0}^{x}\int_{0}^{x}\int_{0}^{x} u(t)dtdtdt = \frac{1}{2!}\int_{0}^{x}(x-t)^{2}u(t)dt. \tag{۸۸.۴}$$

پس از تبدیل معادله مورد نظر به یک معادله انتگرال ولترای استاندارد، می‌توانیم هر یک از روشهائی را که در فصل‌های قبلی مورد بحث قرار گرفتند، برای حل آن به کار ببریم.

اکنون برای ارائه درک بهتری از این روش مثالی را حل می‌کنیم.

مثال ۶.۴. معادله انتگرال ـ دیفرانسیل زیر را با تبدیل آن به یک معادله انتگرال ولترای استاندارد حل کنید.

$$u'(x) = 2 - \frac{1}{4}x^{2} + \frac{1}{4}\int_{0}^{x} u(t)dt, \qquad u(0) = 0. \tag{۸۹.۴}$$

حل. با انتگرال‌گیری از طرفین معادله فوق در فاصله ۰ تا x و استفاده از شرایط اولیه داده شده بدست می‌آوریم:

$$u(x) = 2x - \frac{1}{12}x^{2} + \frac{1}{4}\int_{0}^{x}\int_{0}^{x} u(t)dtdt, \tag{۹۰.۴}$$

که با استفاده از رابطه (۸۷.۴) نتیجه می‌دهد:

$$u(x) = 2x - \frac{1}{12}x^{3} + \frac{1}{4}\int_{0}^{x}(x-t)u(t)dt, \tag{۹۱.۴}$$

به وضوح می‌توان دید که معادله (۹۱.۴) یک معادله انتگرال ولترای استاندارد است که می‌توان آن را با روش تجزیه حل کرد. با استفاده از این تکنیک قرار می‌دهیم:

$$u_0(x) = 2x - \frac{1}{12}x^3, \tag{۹۲.۴}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$u_1(x) = \frac{1}{4}\int_0^x (x-t)\left(2t - \frac{1}{12}t^3\right)dt, \tag{۹۳.۴}$$

لذا:

$$u_1(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{240}x^5. \tag{۹۴.۴}$$

می‌توان به سادگی مشاهده کرد که جمله $\frac{1}{12}x^3$ در دو مولفه $u_0(x)$ و $u_1(x)$ با علامت مخالف ظاهر شده است لذا با حذف جمله معروف به آشوب از $u_0(x)$ می‌توان نشان داد که تابع

$$u(x) = 2x, \tag{۹۵.۴}$$

جواب واقعی معادله انتگرال (۹۱.۴) است.

فصل ۵

حل عددی معادلات انتگرو ـ دیفرانسیل ولترا ـ فردهلم غیرخطی به روش اختلال هموتوپی

۱.۵ روش اختلال هموتوپی

برای تشریح روش اختلال هموتوپی، معادله‌ی (۱) را بصورت

$$L(y)=\sum_{i=0}^{m}p_i(x)y^i(x)-f(x)-\lambda_1\int_a^x k_1y^p dt-\lambda_2\int_a^b k_2y^q dt \qquad (1.5)$$

با شرایط مرزی $B\left(y,\frac{\partial y}{\partial n}\right)=0$ و جواب دقیق $y(x)=g(x)$ در نظر می‌گیریم.

با روش هموتوپی، هموتوپی $H(y,p)$ را بصورت

$$H(y,p)=(1-p)F(y)+pL(y) \qquad (2.5)$$

تعریف می‌کنیم که در آن $F(y)$ عملگر تابعی با جواب معلوم y_0 است که عموماً در شرایط مرزی بالا صدق می‌کند. از معادله‌ی (۲.۵) روشن است که:

$$H(y,0)=F(y),$$

$$H(y,1)=L(y),$$

و روند تغییر پارامتر p از ۰ به ۱، عین روند تغییر $H(y,p)$ از $H(y,0)$ به $H(y,1)$ است.توپولوژی این تغییر شکل، و $H(y,0)$ و $H(y,1)$ هموتوپی نامیده می‌شود.

روش اختلال با پارامتر کوچک $0\le p\le 1$ را بکار می‌بریم می‌توان فرض کرد که جواب (۲.۵) به صورت سری

$$y=y_0+py_1+p^2y_2+\dots \qquad (3.5)$$

قابل نوشتن است. وقتی $p \to ۱$، (۲.۵) به (۱.۵) و (۳.۵) میل می‌کند و در بیشتر حالات، (۲.۵) به جواب تقریبی (۱.۵) یعنی

$$g = \lim_{p \to ۱} y = y_۰ + y_۱ + y_۲ + \dots$$

همگرا می‌شود.

۲.۵ مثال‌های عددی

در این قسمت، سه مثال ارائه می‌شود. این مثال‌ها برای تشریح توانایی و میزان اعتبار این روش در نظر گرفته می‌شوند. در [۱۵، ۱۷]، این مثال‌ها به صورت عددی حل شده‌اند.

مثال ۱.۵. معادله‌ی دیفرانسیل-انتگرالی فردهلم-ولترای غیر خطی زیر را حل می‌کنیم

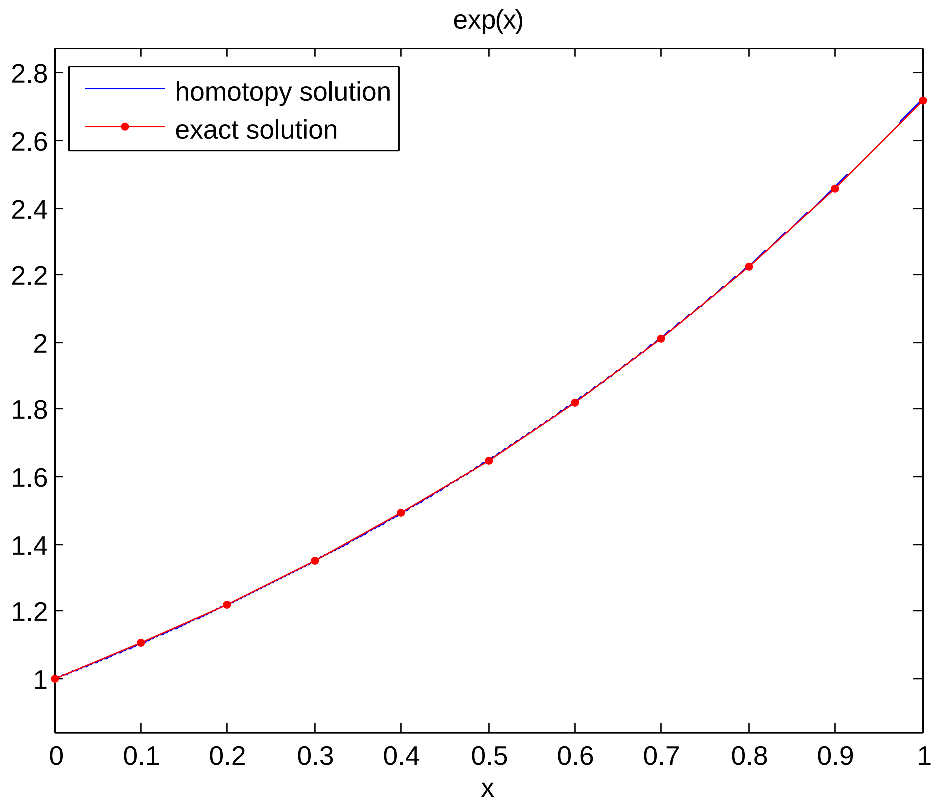
$$y'(x) + ۲xy(x) = f(x) + \int_۰^x (x+t)[y(t)]^۳ dt + \int_۰^۱ (x-t)y(t)dt$$

که در آن

$$f(x) = \left(-\frac{۲}{۳}x + \frac{۱}{q}\right) e^{۳x} + (۲x+۱)e^x + \left(\frac{۴}{۳} - e\right) x + \frac{۸}{۹}$$

با شرط $y(۰) = ۱$ و جواب دقیق $y(x) = e^x$. هموتوپی $\Omega \times [۰, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$y'(x) + (۱-p)۲xe^x + p۲xy(x) - f(x) - \int_۰^۱ \Big\{(۱-p)(x+t)\left[e^t\right]^۳ + p(x+t)\left[y(t)\right]^۳\Big\}dt$$
$$- \int_۰^x \Big\{(۱-p)(x-t)e^t + p(x-t)y(t)\Big\}dt = ۰ \qquad (۴.۵)$$




```
syms x t p yx0 yx1 yx2 yx3 yx4 yx5 yx6 yx7 d0 d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 yt0 yt1...
    yt2 yt3 yt4 yt5 yt6 yt7 ytt0 ytt1 ytt2 ytt3 ytt4 ytt5 ytt6 ytt7 J1 J2 real
fx=((-2*x/3+1/9)*exp(3*x)+(2*x+1)*exp(x)+(4/3-exp(1))*x+8/9);
y0=1;
Yx=[yx0 yx1 yx2 yx3 yx4 yx5 yx6 yx7];
Yt=[yt0 yt1 yt2 yt3 yt4 yt5 yt6 yt7];
Ytt=[ytt0 ytt1 ytt2 ytt3 ytt4 ytt5 ytt6 ytt7];
D=[d0 d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7];
yx=0;
yt=0;
```

xi	exact	homotopy	error
٠.٠٠	١.٠٠٠٠٠٠٠٠	١.٠٠٠٠٠٠٠٠	٠.٠٠٠٠
٠.١٠	١.١٠٥١٧٠٩٢	١.١٠٥١٧٠٩٢	٠.٠٠٠٠
٠.٢٠	١.٢٢١٤٠٢٧٦	١.٢٢١٤٠٢٧٦	٠.٠٠٠٠
٠.٣٠	١.٣٤٩٨٥٨٨١	١.٣٤٩٨٥٨٨١	٠.٠٠٠٠
٠.٤٠	١.٤٩١٨٢٤٧٠	١.٤٩١٨٢٤٧٠	٠.٠٠٠٠
٠.٥٠	١.٦٤٨٧٢١٢٧	١.٦٤٨٧٢١٢٧	٠.٠٠٠٠
٠.٦٠	١.٨٢٢١١٨٨٠	١.٨٢٢١١٨٨٠	٠.٠٠٠٠
٠.٧٠	٢.٠١٣٧٥٢٧١	٢.٠١٣٧٥٢٧١	٠.٠٠٠٠
٠.٨٠	٢.٢٢٥٥٤٠٩٣	٢.٢٢٥٥٤٠٩٣	٠.٠٠٠٠
٠.٩٠	٢.٤٥٩٦٠٣١١	٢.٤٥٩٦٠٣١١	٠.٠٠٠٠
١.٠٠	٢.٧١٨٢٨١٨٣	٢.٧١٨٢٨١٨٣	٠.٠٠٠٠

```
ytt=0;
d=0;
for i=1:7
    yx=yx+Yx(i)*p^(i-1);
    yt=yt+Yt(i)*p^(i-1);
    ytt=ytt+Ytt(i)*p^(i-1);
    d=d+D(i)*p^(i-1);
end
d=d+D(i+1)*p^(i);
k1=(x+t)*exp(3*t);
k2=(x-t)*exp(t);
I01=int(k1,t,0,x);
I11=int(k2,t,0,1);
m=d+(1-p)*2*x*exp(x)+p*2*x*yx-fx-(1-p)*J1-p*yt-(1-p)*J2-p*ytt;
v=(coeffs(m,p));
u=simplify(v);
u=subs(u,J1,I01);
u=subs(u,J2,I11);
U=-1*subs(u,D,[0 0 0 0 0 0 0 0]);
ss(1)=int(U(1),x);%%%%%
ss(1)=exp(x);
for i=2:7
    yy=ss(i-1);
    yyt=subs(yy,x,t);
    I1=int((x+t)*yyt^3,t,0,x);
    I2=int((x-t)*yyt,t,0,1);
    r1=subs(U(i),Yx(i-1),yy);
```

```
    r2=subs(r1,Yt(i-1),I1);
    ss(i)=subs(r2,Ytt(i-1),I2);
end
ss'
g=sum(ss);
disp('homotopy solution=');
pretty(g)
disp(' ');
ezplot(g,[0 1]);
hold on
xx=0:.1:1;
plot(xx,exp(xx),'r.-');
h = legend('homotopy solution','exact solution');
A=zeros(11,4);
A(:,1)=xx;
A(:,2)=exp(xx);
A(:,3)=subs(g,xx);
A(:,4)=A(:,3)-A(:,2);
disp('xi         exact        homotopy       error   ');
disp('--------------------------------------------------');
for i=1:11
    fprintf('%1.2f  |  %1.8f  |%1.8f  |  %1.4f  \n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4));
end
```

با جایگذاری (۳.۵) در (۴.۵) و مرتب‌سازی بر حسب توانهای p، داریم

$$p^{\circ}: y_{\circ}'(x) + ۲xe^{x} = f(x) + \int_{\circ}^{x} (x+t)\left[e^{t}\right]^{۳} dt + \int_{\circ}^{۱} (x-t)e^{t} dt = \circ$$

$$\Longrightarrow y_0(x) = e^x$$

$$p^1 : y_1'(x) - 2xe^x + 2xy_0(x) = \int_0^x \Big\{ -(x+t)\big[e^t\big]^3 + (x+t)\big[y_0(t)\big]^3 \Big\} dt$$

$$+ \int_0^1 \Big\{ -(x-t)e^t + (x-t)y_0(t) \Big\} dt = 0$$

$$\Longrightarrow y_1(x) = 0$$

$$p^2 : y_2'(x) + 2xy_1(x) = \int_0^x (x+t)\big[y_1(t)\big]^3 dt + \int_0^1 (x-t)y_1(t)dt = 0$$

$$\Longrightarrow y_2(x) = 0$$

$$p^3 : y_3'(x) + 2xy_2(x) = \int_0^x (x+t)\big[y_2(t)\big]^2 dt + \int_0^1 (x-t)y_2(t)dt = 0 \Longrightarrow y_3(x) = 0$$

$$\vdots$$

با تکرار این روند داریم:

$$y_4(x) = y_5(x) = \ldots = 0.$$

بنابراین، تقریب جواب مثال ۱.۵ را می‌توان بصورت

$$y = \sum_{i \geq 0} y_i = e^x + 0 + 0 + \ldots$$

بدست آورد، و از این‌رو $y(x) = e^x$ که جواب دقیق مثال ۱.۵ است.

مثال ۲.۵. معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم زیر را در نظر می‌گیریم

$$y''(x) - xy'(x) + x_1 y(x) = f(x) + \int_{-1}^x (x-2t)\big[y(t)\big]^2 dt + \int_{-1}^1 xty(t)dt$$

که در آن

$$f(x)=\frac{2}{25}x^6-\frac{1}{3}x^4+x^3-2x^2-\frac{23}{15}x+\frac{5}{3}$$

$y'(0)=0, y(0)=-1$ و جواب دقیق، $y(x)=x^2-1$ است. با استفاده از روش اختلال هموتوپی، داریم

$$\begin{aligned} y''(x)-(1-p)x(2x)-pxy'(x)+(1-p)x\big(x^2-1\big)+pxy(x)-f(x) \\ -\int_{-1}^{x}\Big\{(1-p)(x-2t)\big[x^2-1\big]^2+p(x-2t)\big[y(t)\big]^2\Big\}dt \\ +\int_{-1}^{1}\Big\{(1-p)xt\big(x^2-1\big)+pxty(t)\Big\}dt=0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

با جایگذاری (۳.۵) در (۵.۵) و برابر هم قرار دادن ضرایب جملات بر حسب توانهای یکسان p، داریم

$$\begin{aligned} p^0 &: y_0''(x)-x(2x)+x\big(x^2-1\big)-f(x)-\int_{-1}^{x}(x-2t)\big[x^2-1\big]^2dt \\ &\quad+\int_{-1}^{1}xt\big(x^2-1\big)dt=0\Rightarrow y_0(x)=x^2-1. \\ p^1 &: y_1''(x)+x(2x)-xy_0'(x)-x\big(x^2-1\big)+xy_0(x) \\ &\quad-\int_{-1}^{x}\Big\{-(x-2t)\big[x^2-1\big]^2+(x-2t)\big[y_0(t)\big]^2\Big\}dt \\ &\quad+\int_{-1}^{1}\Big\{-xt\big(x^2-1\big)+xty_0(t)\Big\}dt=0\Longrightarrow y_1(x)=0. \\ p^2 &: y_2''(x)-xy_1'(x)+xy_1(x)-\int_{-1}^{x}(x-2t)\big[y_1(t)\big]^2dt+\int_{-1}^{1}xty_1(t)dt=0\Rightarrow y_2(x)=0 \\ p^3 &: y_3''(x)-xy_2'(x)+xy_2(x)-\int_{-1}^{x}(x-2t)\big[y_2(t)\big]^2dt+\int_{-1}^{1}xty_2(t)dt=0\Rightarrow y_3(x)=0 \end{aligned}$$

با تکرار این فرایند بدست می‌آوریم

$$y_4(x)=y_5(x)=\ldots=0.$$

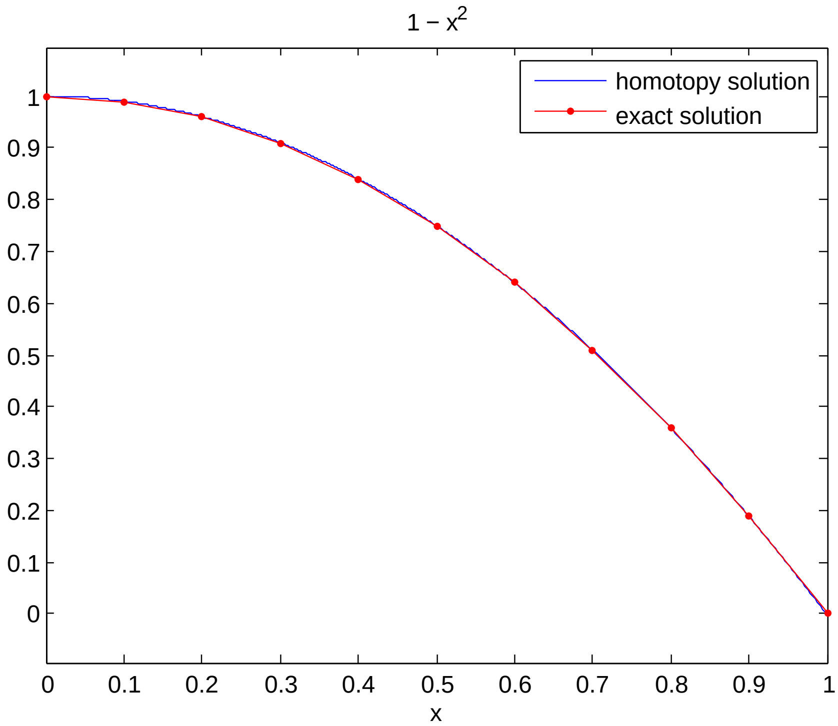
بنابراین، به آسانی می‌توان تقریب جواب مثال ۲.۵ را مقدار

$$y = \sum_{i=۰}^{\infty} y_i = x^۲ - ۱ + ۰ + ۰ + \dots$$

بدست آورد. از اینرو،

$$y(x) = x^۲ - ۱$$

که جواب دقیق مثال ۲.۵ است.




```
syms x t p yx0 yx1 yx2 yx3 yx4 yx5 yx6 yx7 d0 d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 yt0 yt1...
    yt2 yt3 yt4 yt5 yt6 yt7 ytt0 ytt1 ytt2 ytt3 ytt4 ytt5 ytt6 ytt7 J1 J2 ff real
fx=-.2*x^5+2/3*x^3+5*x^2/6-113*x/105-1;
y0=1;
Yx=[yx0 yx1 yx2 yx3 yx4 yx5 yx6 yx7];
```

```
xi        exact        homotopy    error
---------------------------------------
۰.۰۰ | ۱.۰۰۰۰۰۰۰۰ |۱.۰۰۰۰۰۰۰۰ | ۰.۰۰۰۰
۰.۱۰ | ۰.۹۹۰۰۰۰۰۰ |۰.۹۹۰۰۰۰۰۰ | ۰.۰۰۰۰
۰.۲۰ | ۰.۹۶۰۰۰۰۰۰ |۰.۹۶۰۰۰۰۰۰ | ۰.۰۰۰۰
۰.۳۰ | ۰.۹۱۰۰۰۰۰۰ |۰.۹۱۰۰۰۰۰۰ | ۰.۰۰۰۰
۰.۴۰ | ۰.۸۴۰۰۰۰۰۰ |۰.۸۴۰۰۰۰۰۰ | ۰.۰۰۰۰
۰.۵۰ | ۰.۷۵۰۰۰۰۰۰ |۰.۷۵۰۰۰۰۰۰ | ۰.۰۰۰۰
۰.۶۰ | ۰.۶۴۰۰۰۰۰۰ |۰.۶۴۰۰۰۰۰۰ | ۰.۰۰۰۰
۰.۷۰ | ۰.۵۱۰۰۰۰۰۰ |۰.۵۱۰۰۰۰۰۰ | ۰.۰۰۰۰
۰.۸۰ | ۰.۳۶۰۰۰۰۰۰ |۰.۳۶۰۰۰۰۰۰ | ۰.۰۰۰۰
۰.۹۰ | ۰.۱۹۰۰۰۰۰۰ |۰.۱۹۰۰۰۰۰۰ | ۰.۰۰۰۰
۱.۰۰ | ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰ |۰.۰۰۰۰۰۰۰۰ | ۰.۰۰۰۰
```

```
Yt=[yt0 yt1 yt2 yt3 yt4 yt5 yt6 yt7];
Ytt=[ytt0 ytt1 ytt2 ytt3 ytt4 ytt5 ytt6 ytt7];
D=[d0 d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7];
yx=0;
yt=0;
ytt=0;
d=0;
for i=1:7
    yx=yx+Yx(i)*p^(i-1);
    yt=yt+Yt(i)*p^(i-1);
    ytt=ytt+Ytt(i)*p^(i-1);
    d=d+D(i)*p^(i-1);
end
```

```
d=d+D(i+1)*p^(i);
k1=(1-t*t)^2;
k2=(x*x*t+t*x*t)*(1-t*t)^2;
I01=int(k1,t,0,x);
I11=int(k2,t,0,1);
m=d+(1-p)*(1-x^2)^2+p*yx-ff-(1-p)*J1-p*yt-(1-p)*J2-p*ytt;
v=(coeffs(m,p));
u=simplify(v);
%u=subs(u,J1,I01);
%u=subs(u,J2,I11);
U=-1*subs(u,D,[0 0 0 0 0 0 0 0]);
ss(1)=int(U(1),x);%%%%
ss(1)=1-x*x;
ss(2)=0;
for i=3:4
    yy=ss(i-1);
    yyt=subs(yy,x,t);
    I1=int((x+t)*yyt^3,t,0,x);
    I2=int((x-t)*yyt,t,0,1);
    r1=subs(U(i),Yx(i-1),yy);
    r2=subs(r1,Yt(i-1),I1);
    ss(i)=subs(r2,Ytt(i-1),I2);
end
ss'
g=sum(ss);
disp('homotopy solution=');
pretty(g)
```

```
disp(' ');
ezplot(g,[0 1]);
hold on
xx=0:.1:1;
plot(xx,(1-xx.^2),'r.-');
h = legend('homotopy solution','exact solution');
A=zeros(11,4);
A(:,1)=xx;
A(:,2)=(1-xx.^2);
A(:,3)=subs(g,xx);
A(:,4)=A(:,3)-A(:,2);
disp('xi          exact          homotopy          error  ');
disp('----------------------------------------------------');
for i=1:11
    fprintf('%1.2f | %1.8f |%1.8f | %1.4f \n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4));
end
```

مثال ۳.۵. معادله‌ی انتگرال ‑دیفرانسیل ولترا ‑ فردهلم غیر خطی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$y'''(x)+y(x)=f(x)+\int_{۰}^{x} y^{۲}(t)dt+\int_{۰}^{۱}(x^{۲}t+xt^{۲})y(t)dt$$

که در آن

$$f(x)=\frac{-x^{۵}}{۵}+\frac{۲x^{۳}}{۳}+\frac{۵x^{۲}}{۶}-\frac{۱۱۳x}{۱۰۵}-۱,$$

$$y(۰)=۱, y'(۰)=۰, y''(۰)=-۲,$$

و جواب دقیق $y(x)=۱-x^{۲}$ است.

روش اختلال هموتوپی به صورت زیر است:

$$y'''(x) + (1-p)\big(1-x^2\big) + py(x) - f(x) - \int_0^x \Big((1-p)\big[1-x^2\big]^2 + p[y(t)]^2\Big)dt$$
$$- \int_0^1 \Big\{(1-p)\big(x^2t + xt^2\big)\big[1-x^2\big]^2 + p\big(x^2t + xt^2\big)[y(t)]^2\Big\}dt = 0. \qquad (۶.۵)$$

با جایگذاری (۳.۵) در (۶.۵) و مساوی صفر قرار دادن ضرایب بر حسب توان‌های یکسان برابر p داریم

$$p^0 : y_0''(x) + \big(1-x^2\big) - f(x) - \int_0^x \big[1-x^2\big]^2 dt - \int_0^1 \big(x^2t + xt^2\big)\big[1-x^2\big]^2 dt = 0$$
$$\Rightarrow y_0(x) = 1 - x^2,$$
$$p^1 : y_1''(x) - \big(1-x^2\big) + y_0(x)\int_0^x \Big\{-\big[1-x^2\big]^2 + [y(t)]^2\Big\}dt - \int_0^1 \Big\{-\big(x^2t + xt^2\big)\big[1-x^2\big]^2$$
$$+ \big(x^2t + xt^2\big) \times [y_0(t)]^2\Big\}dt = 0 \Rightarrow y_1(x) = 0$$
$$p^2 : y_2''(x) + y_1(x) - \int_0^x p[y_1(t)]^2 dt - \int_0^1 \big(x^2t + xt^2\big)[y_1(t)]^2 dt = 0 \Rightarrow y_2(x) = 0$$
$$p^3 : y_3''(x) + y_2(x) - \int_0^x p[y_2(t)]^2 dt - \int_0^1 \big(x^2t + xt^2\big)[y_2(t)]^2 dt = 0 \Rightarrow y_3(x) = 0$$

با ادامه این روند، خواهیم داشت: $y_4(x) = y_5(x) = \cdots = 0$. بنابراین، تقریب جواب مثال ۳.۵ به آسانی بدست می‌آید:

$$y = \sum_{i \geq 0} y_i = 1 - x^2 + 0 + 0 + \ldots$$

و از اینرو $y(x) = 1 - x^2$ که جواب دقیق مثال ۳.۵ است.

نتیجه گیری

در این تحقیق، از روش اختلال هموتوپی برای حل معادلات انتگرال–دیفرانسیل–ولترا– فردهلم غیر خطی استفاده کردیم. نتایج حاصله از این تحقیق، کارایی این روش را برای حل چنین مسائلی نشان می‌دهد. جواب حاصل از روش اختلال هموتوپی نه تنها برای معادلات غیر خطی ضعیف برقرار/معتبر است بلکه برای معادلات غیرخطی قوی نیز معتبر است. بعلاوه، جواب‌های صحیح در مثال‌های ارائه شده در این پایان‌نامه، از تقریب‌های مرتبه اول بدست آمدند.

مراجع

[1] J. H. He. *The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities*. Applied Mathematics and Computation, 151:(2004),287-292.

[2] J. H. He., *Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations*. Chaos, Solitons and Fractals, 26: (2005), 695-700.

[3] J. H. He. *Homotopy perturbation method for solving boundary value problems*. Physics Letters A, 350: (2006), 87-88.

[4] J. H. He. *Homotopy perturbation technique*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 178: (1999), 257-262.

[5] J. H. He. *A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 35(1): (2000), 37-43.

[6] S. J. Liao. *An approximate solution technique not depending on small parameter: A special example*. In J Nonlinear Mech., 30(3): (1995), 371-80.

[7] S. J. Liao. *Boundary element method for general non-linear differential operators*. Eng Anal Boundary Element, 20(2): (1997), 91-99.

[8] L. M. Delves. and J. L. Mohamed. *Computational methods for integral equation*. Cambridge: Cambridge University press (1985).

[9] A. H. Nayfeh. *Problems in perturbation*. New York: Wiley (1985).

[10] A. M. Siddiqui, A. Zeb and Q. K. Ghori. *Homotopy perturbation method for thin film flow of a fourth grade fluid down a vertical cylinder*. Physics Letters A, 352: (2006), 404-410.

[11] L. Cveticanin. *Homotopy-perturbation method for pure nonlinear differential equation*. Chaos, Solitons and Fractals, 30: (2006), 1221-1230.

[12] J. Biazar, M. Eslami. and H. Ghazvini. *Homotopy Perturbation Method for Systems of Partial Differential Equations*. International Journal of Non-Linear sciences and numerical simulation, 8(3): (2007), 411-416.

[13] J. Biazar, H. Ghazvini. and M. Eslami. *He's homotopy perturbation method for systems of integro-differential equa tions*. Chaos, Solitons and Fractals, 39: (2009), 1253-1258.

[14] S. Abbasbandy. *Application of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method*. Applied Mathematics and Computation, 173: (2006), 493-500.

[15] K. Maleknejad. and Y. Mahmudi. *Taylor polynomial solution of high-order solving nonlinear Volterra-Fredholm integro-differntial equations*. Applied Mathematics and Computation, 145: (2003), 641-653.

[16] A. M.Wazwaz, *A first course in integral equations*, WSPC, New Jersey, 1997.

[17] W. Wang. *An algorithm for solving the high-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations*. Ap- plied Mathematics and Computation, 172: (2006), 1-23.

Title: **Solutions for Non-linear Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations by He's Homotopy Perturbation Method**

Abstract

Homotopy perturbation method was introduced by J. H. He. This method requires no small parameter in the equation. In this way, according to the topology of a homotopy homotopy technique with the parameter $p \in [0, 1]$ is created and this parameter is assumed to be a small parameter. This combination is homotopy and perturbation method for solving linear and nonlinear differential equations and integral equations is useful and efficient. The way to solve the majority of problems in recent years nonlinear used by many scientists. In this thesis, an application of He's homotopy perturbation method is applied to solve non-linear Volterra-Fredholm integro-differential equations. Some non-linear examples are prepared to illustrate the efficiency and simplicity of the method.

Keywords: Analytical methods, Operator, Convergence, Perturb, Volterra Fredholm differential integral equation,

By: Nayyereh Babazadeh Ardabili

Islamic Azad University

Ardabil Branch

Department of Mathematical

Thesis M.Sc.

On Analysis Numerical Subject

Solutions for Non-linear Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations by He’s Homotopy Perturbation Method

Supervisor

Ph. D. Akbar Jafari Shaerlar

By

Nayyereh Babazadeh Ardabili

2015